ATS
Jules Ferry

TD 11 : Méthodes des rectangles et des trapèzes pour le calcul approché d'une intégrale sur un segment

Info

On considère une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue pour laquelle on ne sait pas calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_a^b f(x)\,dx$, on cherche alors à en calculer une valeur approchée de manière numérique.
Il y a deux méthodes au programme : la méthode des rectangles et la méthode des trapèzes.

Rappel : la définition d'un fonction f se fait de la manière suivante :

```
function y=f(x)    //définition de la fonction f de variable x et d'image y
    y=(x^2+2*x)*exp(-x)    //on définit  f(x)=(x²+2x)e^-x
endfunction
```

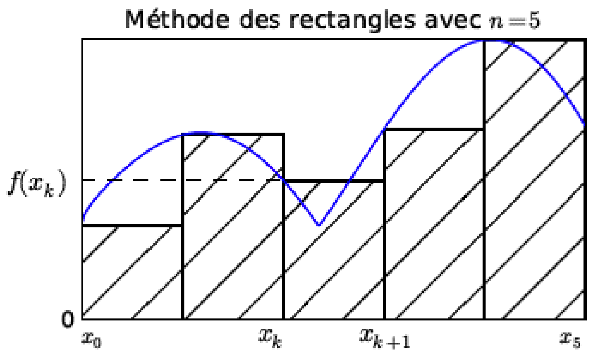
Les variables x et y utilisées dans la définition d'une fonction sont des variables muettes, elles peuvent donc être réutilisées dans la définition d'une nouvelle fonction ou dans Scilab.

I. Méthode des rectangles

1. Présentation

On commence par créer une subdivision du segment $[a;b]$ en n sous-segments $[x_k;x_{k+1}]$ de longueur $\dfrac{b-a}{n}$; on a alors $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$ avec $x_0=a$ et $x_n=b$.

La **méthode des rectangles à gauche** consiste à remplacer $f(x)$ sur le sous-segment $[x_k;x_{k+1}]$ par la valeur constante $f(x_k)$. L'intégrale I est alors approchée par la somme : $\boxed{S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}$.

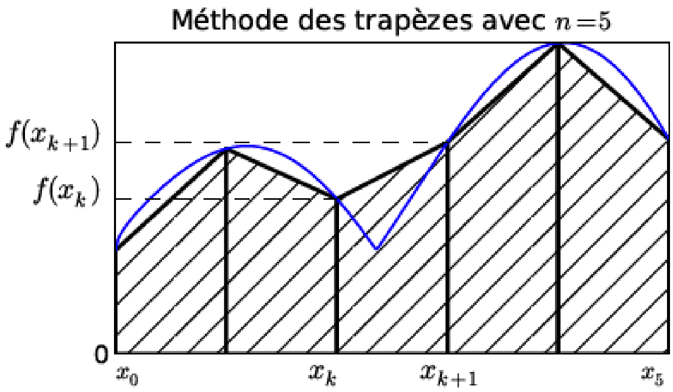


2. Autres possibilités

La **méthode des rectangles à droite** consiste à remplacer $f(x)$ sur le sous-segment $[x_k;x_{k+1}]$ par la valeur constante $f(x_{k+1})$. L'intégrale I est alors approchée par la somme : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}).\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})}$.

La **méthode des rectangles médians** consiste à remplacer $f(x)$ sur le sous-segment $[x_k;x_{k+1}]$ par la valeur constante $f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$.

II. Méthode des trapèzes



La **méthode des trapèzes** consiste à remplacer $f(x)$ sur le sous-segment $[x_k ; x_{k+1}]$ par la fonction affine qui coïncide avec f en x_k et x_{k+1}. L'intégrale I est alors approchée par la somme :

$$\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}}.$$

On trouve alors un lien entre T_n et S_n :

$$T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right) = S_n + \frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a))$$

III. Entraînement

1. Concours ATS 2016

Le but d'un exercice d'électrostatique tombé en 2016 était de calculer $\int_R^{R+z_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$.

À condition d'avoir réalisé les questions précédentes de l'exercice de physique, la question posée était équivalente à : on souhaite calculer l'intégrale précédente en utilisant une procédure informatique d'intégration dite « méthode des rectangles », présentée ci-dessous :

```
function S=rectangles(a,b,n,f)
//méthode d'approximation dites des 'rectangles'
S=0
for i=0:n-1
     x1=a+i*(b-a)/n ;
     x2= a+(i+1)*(b-a)/n ;
     S=S+f((x1+x2)/2)*(x2-x1) ;
end
endfunction
```

Figure 3 : intégration par la méthode des rectangles

Donner les valeurs de a et b et l'expression de la fonction f utilisées dans la procédure ci-dessus.

Répondre à la question du concours et quel « type » de méthode des rectangles est employée ?

2. Programmation

1. Définir une fonction *rectg* prenant en arguments une fonction f, deux réels a et b et un entier non nul n et renvoyant l'approximation S_n de l'intégrale I.
2. Tester cette fonction pour calculer des valeurs approchées des intégrales des fonctions suivantes sur les segments indiqués, pour différentes valeurs de n :
   - $f(x) = x$ sur $[0,1]$;
   - $f(x) = x^3$ sur $[0,1]$;
   - $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi/2]$.

   Déterminer une valeur de n pour laquelle la somme S_n est une valeur approchée de I à 10^{-3} près.
3. Définir une fonction *trapeze* prenant en arguments une fonction f, deux réels a et b et un entier non nul n et renvoyant l'approximation T_n de l'intégrale I.
4. Reprendre la question 2.