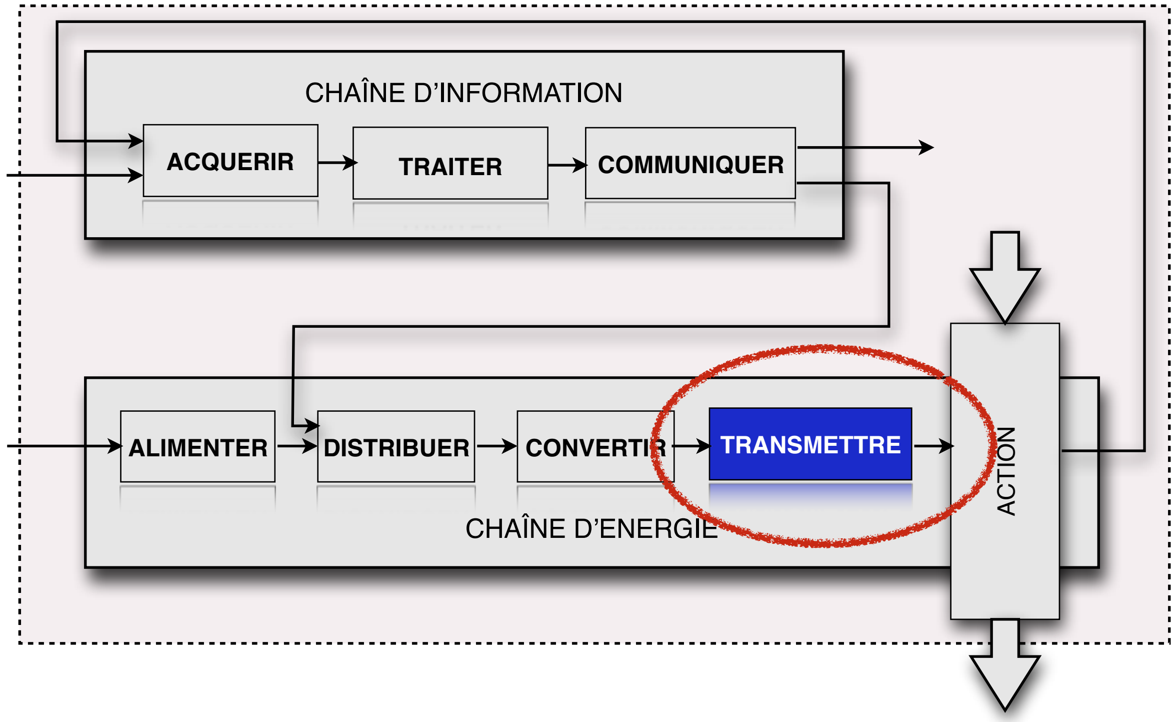
CINEMATIQUE DU SOLIDE



PROBLEMATIQUE

« La chaîne d’énergie a pour fonction la réalisation d’actions en vue de produire un effet sur la matière d’oeuvre.

Il y a quasiment systématiquement l’existence de mouvements, qu’il est nécessaire de pouvoir modéliser afin de pouvoir vérifier la conformité de l’action par rapport au cahier des charges »

B - MODELISER	
B1 : Identifier et caractériser les grandeurs physiques agissant sur un système	Proposer des hypothèses simplificatrices en vue de la modélisation
B2 Proposer un modèle de connaissance et de comportement	Paramétrer les mouvements d’un solide indéformable
C - RESOUDRE	
C1 : Choisir une démarche de résolution	Proposer une démarche permettant de déterminer une loi de mouvement
C2 : Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique	Déterminer les courants et les tensions dans les composants Déterminer les puissances échangées
	Déterminer la trajectoire d’un point d’un solide par rapport à un autre
	Déterminer le vecteur vitesse d’un point d’un solide par rapport à un autre
	Déterminer le vecteur accélération d’un point d’un solide par rapport à un autre

Sommaire

A. Généralités

Ce cours fait suite au cours de cinématique du point. Nous nous intéressons maintenant aux mouvements relatifs d'un solide par rapport à une référence.

Cette référence peut aussi bien être la référence de la terre que nous supposerons fixe, qu'un autre solide (lui même pouvant être en mouvement par rapport à un troisième solide).

A.1. Position d'un point liée à un solide

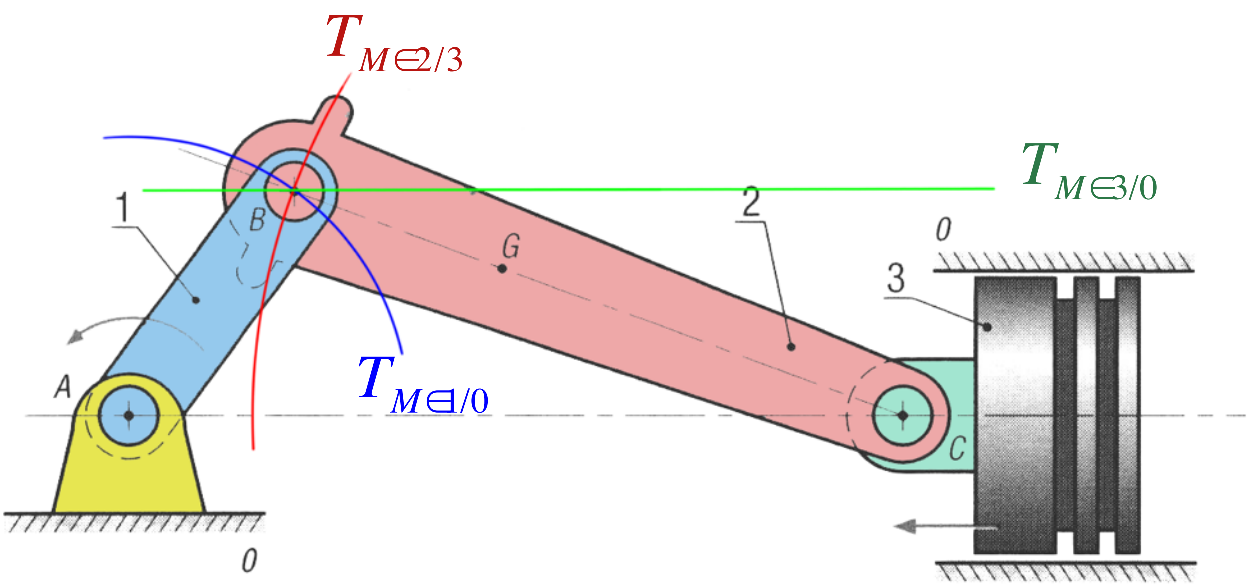
En cinématique, l'étude du mouvement d'un point nécessite impérativement de définir :

- la référence du mouvement (le solide par rapport auquel le mouvement est défini)
- le solide auquel est attaché le point.

En effet, un point peut sembler naturellement «attaché» à un solide, mais il peut également être le centre d'une liaison entre 2 solides, voire être totalement «détaché» du solide.

Ainsi, dans la figure ci-dessous, le point B peut être considéré attaché de façon naturelle au solide (2), mais également au solide (1), voire au solide (3). En fonction du solide de référence, ce point B aura alors des trajectoires différentes :

- la trajectoire du point B lié à (1) par rapport au solide de référence (0) est un cercle centré sur A et de rayon AB
- la trajectoire du point B lié à (2) par rapport au solide de référence (3) est un cercle centré sur C et de rayon CB
- la trajectoire du point B lié à (3) par rapport au solide de référence (0) est une droite horizontale



Notes

A.2. Expression des vecteurs vitesse et accélération

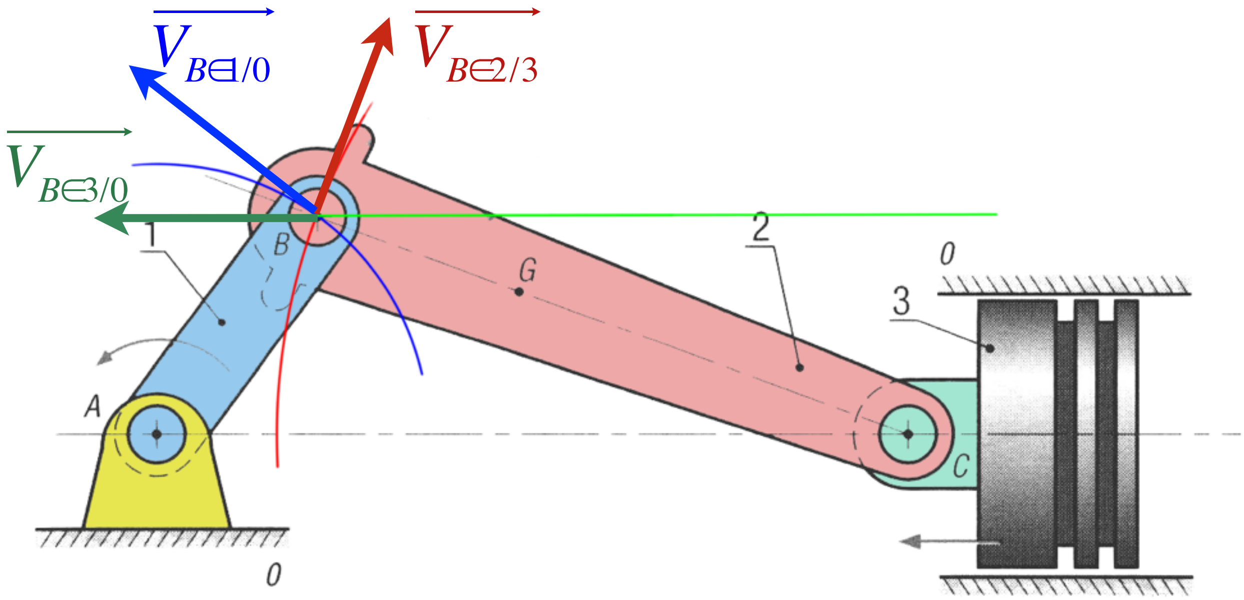
La position d'un point dépendant donc du repère de référence et du repère auquel ce point est lié, le vecteur vitesse doit lui aussi impérativement faire figurer ces deux repères.

Il en va de même pour l'accélération

On écrira

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/3}} \text{ et } \overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/3}}$$

Ainsi, dans le cas du mécanisme précédent (rappelons que les vecteurs vitesse sont toujours tangents à la trajectoire), on écrira :



Notes

B. Torseur cinématique

B.1. Champs des vecteurs vitesse d'un solide

On considère un solide (S) constitué d'un ensemble de points M.

On appelle champs des vecteurs vitesses d'un solide (S) en mouvement par rapport à un repère R_0 l'ensemble des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_{M\in S/R_0}}$ pour tout point M du solide.

B.2. Equiprojectivité des vitesses

On considère deux points M et N appartenant à un même solide. Ce solide est en mouvement par rapport à un repère $R_0 = \left(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$

Le solide étant indéformable, la distance entre ces deux points est constante :

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \text{constante} \text{ , soit } \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 = \text{constante}$$

Donc $$\frac{d\left(\overrightarrow{MN}^2\right)}{dt} = 2\overrightarrow{MN}.\frac{d\left(\overrightarrow{MN}\right)}{dt} = 0 \qquad \text{[E1]}$$

Or $$\left[\frac{d\left(\overrightarrow{MN}\right)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}\right)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{ON}\right)}{dt}\right]_{R_0} - \left[\frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{V_{N\in S/R_0}} - \overrightarrow{V_{M\in S/R_0}}$$

L'équation [E1] devient alors :

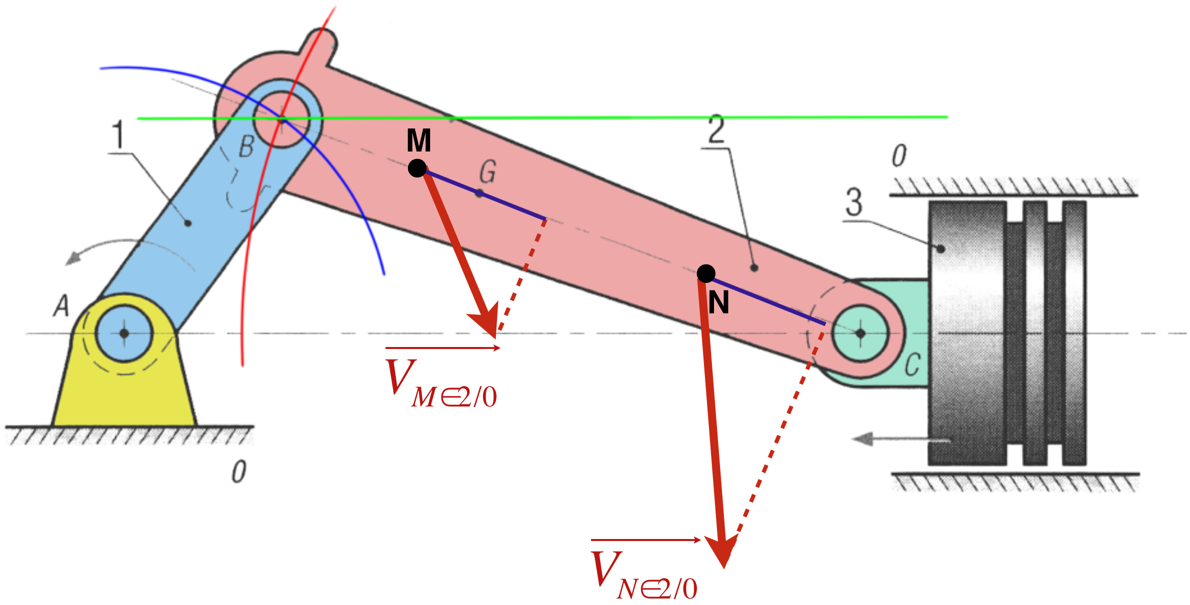
$$2\overrightarrow{MN}.\left(\overrightarrow{V_{N\in S/R_0}} - \overrightarrow{V_{M\in S/R_0}}\right) = 0$$

Soit finalement :

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{V_{M\in S/R_0}} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{V_{N\in S/R_0}}$$

Le champ des vitesses d'un solide est dit équiprojectif.

Notes



Notons que le théorème d'équiprojectivité s'applique que les points appartiennent physiquement au solide ou non.

B.3. Torseur cinématique

B.3.1. Formule de Varignon

Considérons 2 points A et B appartenant au même solide (1). Ce solide (1) est en mouvement par rapport à un autre solide (0).

Le repère $R_0 = \left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ est lié au solide (0)

Le repère $R_1 = \left(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ est lié au solide (1)

Cherchons à exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$ par rapport au vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$:

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0}$$

Notes

Or, par la formule de dérivation vectorielle, on a:

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

D'où la relation suivante, fondamentale en cinématique du solide, appelée «Formule de Varignon» :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}}$$

La formule de Varignon permet de déterminer le vecteur vitesse de n'importe quel point du solide à partir de la connaissance d'une première vitesse et du vecteur rotation

B.3.2. Torseur cinématique

Ainsi, le champs des vecteurs vitesse d'un solide (1) en mouvement par rapport à (0) sera entièrement décrit par :

- un vecteur vitesse en un point A : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$
- le vecteur rotation de (1) par rapport à (0) : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

Ce couple de vecteur est appelé **torseur cinématique du mouvement de 1/0 réduit au point A**.

Le torseur cinématique sera noté :

$$\boxed{\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \end{array}\right\}_A \overleftrightarrow{AB}}$$

Remarques importantes

- A est appelé point de réduction du torseur
- Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ et $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ sont appelés éléments de réduction du torseur, avec :
  - ✓ $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ **résultante** du torseur, indépendant du point de réduction
  - ✓ $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$ **moment** du torseur, qui dépend du point de réduction

Notes

B.4. Propriétés des torseurs

Les propriétés que nous allons évoquer dans le cadre de la cinématique du solide sont applicables à tous les torseurs que vous serez amener à voir cette année : torseurs statique, cinétique, dynamique.

B.4.1. Changement de point de réduction

Soit le torseur suivant : $\{T_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_A} \end{array} \right\}_A$

Exprimer («déplacer») ce torseur en un autre point revient à exploiter la formule de Varignon. On écrira :

$$\{T_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1,B}} \end{array} \right\}_B \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{M_{1,A}} = \overrightarrow{M_{1,B}} + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{BA}$$

B.4.2. Egalité de deux torseurs

Deux torseurs seront identiques s'ils ont les mêmes éléments de réduction **en un même point**

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{2,A}} \end{array} \right\}_A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} = \overrightarrow{M_{2,A}} \end{array} \right.$$

B.4.3. Torseur nul

Un torseur $\{T_1\}$ est nul s'il existe au moins un point de réduction pour lequel ses éléments de réduction sont nuls.

Il suffit que la résultante $\overrightarrow{R_1}$ soit égale à $\vec{0}$ et qu'il existe au moins un point A où $\overrightarrow{M_{1,A}} = \vec{0}$

Notes

B.4.4. Somme de torseurs

La somme de deux torseurs $\{T_1\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} \end{Bmatrix}_A$ et $\{T_2\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{2,A}} \end{Bmatrix}_A$ est un <u>torseur</u> dont les éléments de réduction sont la somme des éléments de réduction de chacun des torseurs :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{2,A}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} + \overrightarrow{M_{2,A}} \end{Bmatrix}_A$$

ATTENTION : Cette somme n'a de sens que si les deux torseurs sont exprimés au même point de réduction

B.4.5. Comoment («Produit») de torseurs

Le comoment de deux torseurs $\{T_1\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} \end{Bmatrix}_A$ et $\{T_2\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{2,A}} \end{Bmatrix}_A$ est un <u>scalaire</u>, qui a pour expression :

$$\{T_1\} \otimes \{T_1\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1,A}} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_{2,A}} \end{Bmatrix}_A = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_{2,A}} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_{1,A}}$$

Propriétés :

- Le comoment de deux torseurs est une opération commutative
- Il est indépendant du point de réduction choisi

ATTENTION : Ce comoment n'a de sens que si les deux torseurs sont exprimés au même point de réduction

Notes

B.5. Mouvements particuliers

B.5.1. Translation

Considérons un solide (1) dont une base associée est $B_1\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$, et un solide (2) dont une base associée est $B_2\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$

Le solide (2) sera dit en translation par rapport au solide (1) si les vecteurs de leurs deux bases respectives restent parallèles au cours du mouvement.

Le torseur cinématique de ce mouvement sera de la forme :

$$\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}\end{array}\right\}_A$$

B.5.2. Rotation

Considérons un solide (1) dont une base associée est $B_1\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$, et un solide (2) dont une base associée est $B_2\left(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$

Le solide (2) sera dit en rotation par rapport au solide (1) s'il existe deux points A et B pour lesquels les vecteurs vitesse sont nuls :

$$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}=\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}=\vec{0}$$

L'axe $(\Delta)=(AB)$ est l'axe de rotation.

Le torseur cinématique de ce mouvement sera de la forme :

$$\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\\ \vec{0}\end{array}\right\}_A \text{ pour tout point } A\in(\Delta)$$

Notes

C. Composition des mouvements

Nous allons à présent considérer le mouvement d'un solide (2) par rapport à un solide (1), lui-même en mouvement par rapport à un troisième solide (0).

$R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ est un repère lié à (0)

$R_1\left(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$ est un repère lié à (1)

$R_2\left(O_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2}\right)$ est un repère lié à (2)

C.1. Composition des vitesses

C.1.1. Vitesse d'entraînement

On cherche ici une relation entre $\overrightarrow{V_{M\in 2/1}}$ et $\overrightarrow{V_{M\in 2/0}}$

$$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}$$

Or $\left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}}$

et $\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$ d'après la formule de dérivation vectorielle

$$= \overrightarrow{V_{M\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Le terme $\overrightarrow{V_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OM}$ est appelé **vitesse d'entraînement**

Notes

C.1.2. Composition des vitesses relatives

Un mouvement complexe peut parfois être décomposé en la somme de mouvements simples entre référentiels différents.

La relation de composition des vecteurs vitesse permet d'exprimer la vitesse d'un point en considérant une suite de référentiels successifs, chacun en mouvement simple par rapport au précédent.

Une relation basée sur la relation de Chasles permet d'écrire :

$$\overrightarrow{\Omega_{M\in n/0}} = \overrightarrow{\Omega_{M\in n/n-1}} + \overrightarrow{\Omega_{M\in n-1/n-2}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{M\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{M\in 1/0}}$$

et

$$\overrightarrow{V_{M\in n/0}} = \overrightarrow{V_{M\in n/n-1}} + \overrightarrow{V_{M\in n-1/n-2}} + \ldots + \overrightarrow{V_{M\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{M\in 1/0}}$$

C.2. Composition des torseurs

Les relations de composition des vitesses montre immédiatement que la composition s'applique aux torseurs cinématiques, dont les éléments de réduction $\overrightarrow{\Omega_{i/j}}$ et $\overrightarrow{V_{M\in i/j}}$ s'ajoutent lorsque chacun de ces torseurs est exprimé au même point :

$$\left\{\mathcal{V}_{n/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{n/n-1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\right\} + \ldots + \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$$

Notes