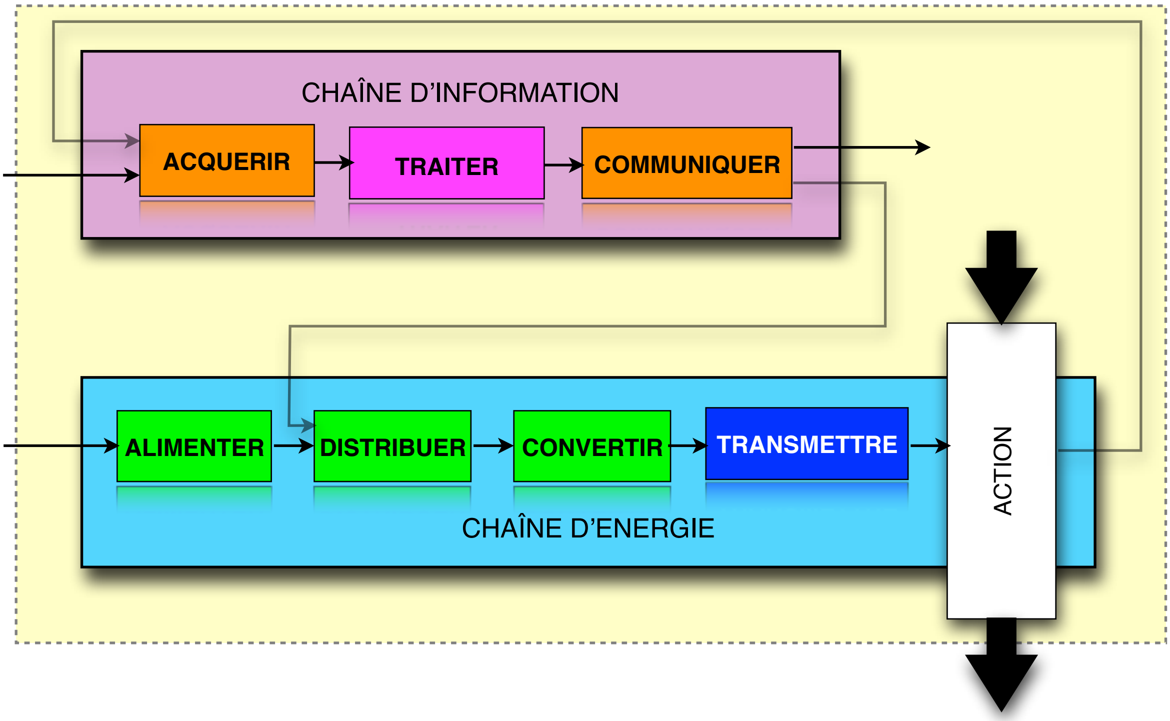
ELECTROCINETIQUE



Crédits : Electrocinétique PCSI Nathan - Electrocinétique ATS PMF

Sommaire

A. Les dipôles

A.1. Généralités sur les circuits électriques

A.1.1. Circuit électrique

A.1.1.1. Définitions

Circuit électrique : un circuit électrique est un ensemble de conducteurs reliés par des fils de jonction et dans lequel circule un courant électrique.

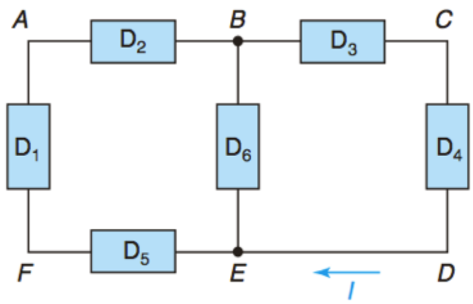
Dipôle : composant électrique possédant deux bornes

Noeud d'un circuit : point commun à au moins deux dipôles

Maille d'un réseau : partie d'un circuit formant un contour fermé

Branche d'un circuit : ensemble de dipôles situés entre deux noeuds consécutifs

A.1.1.2. Exemple



Ce circuit comporte :

- six dipôles D_1 à D_6
- deux noeuds B et E
- trois branches BE, BCDE et BAFE

Il est constitué de deux mailles {ABEFA} et {BCDEB}

A.1.2. Courant électrique

On appelle courant électrique le déplacement de porteurs de charges dans le circuit électrique. Conventionnellement, le sens du courant est celui du déplacement des charges positives (et donc opposé au sens des électrons).

Si on note dq le déplacement de la charge pendant un temps *dt*, alors l'intensité du courant est égale à :

$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$ où q est la charge en Coulomb (C), t le temps en seconde (s) et I l'intensité en Ampère (A)

Notes

A.1.3. Tension aux bornes d'un dipôle

Les charges électriques se déplacent sous l'action d'un champ électrique E, qui fournit ou consomme de l'énergie. Cette variation d'énergie se traduit par une différence de potentiel V entre deux points d'un circuit électrique.

La variation est positive dans le cas d'une source, négative dans le cas d'un récepteur.

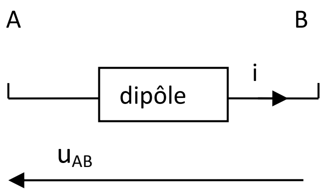
$$\boxed{u_{AB} = V_A - V_B = \int_B^A E\,dx}$$

On appellera <u>tension</u> cette différence de potentiel. Cette tension est représentée dans un circuit électrique par une flèche dont l'extrémité désigne le potentiel le plus élevé.

Un fil électrique ne générant que des pertes infimes, la différence de potentiel aux bornes d'un fil est nulle.

A.1.4. Dipôle électrique

A.1.4.1. <u>Conventions</u>



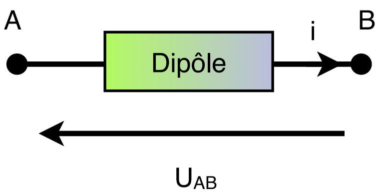
Un dipôle électrique est caractérisé par deux grandeurs électriques :

- l'intensité i qui le traverse
- la différence de potentiel, ou tension, entre les deux bornes du dipôle

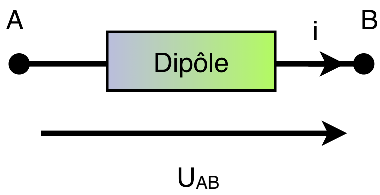
L'orientation du courant est arbitraire. Si la valeur calculée est positive, le courant circule alors effectivement dans le sens choisi.

L'orientation de la tension dépende la convention retenue :

- En convention récepteur, la tension est orientée en sens contraire de l'intensité (ce qui est compréhensible puisque, le récepteur consommant de l'énergie, son potentiel est plus élevé en entrée)
- En convention générateur, la tension est orientée dans le même sens que l'intensité.

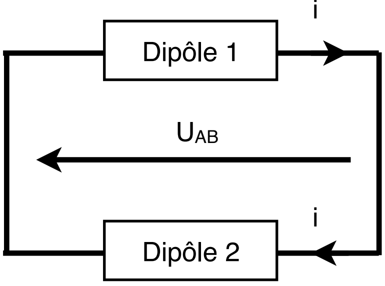


Dipôle en convention récepteur



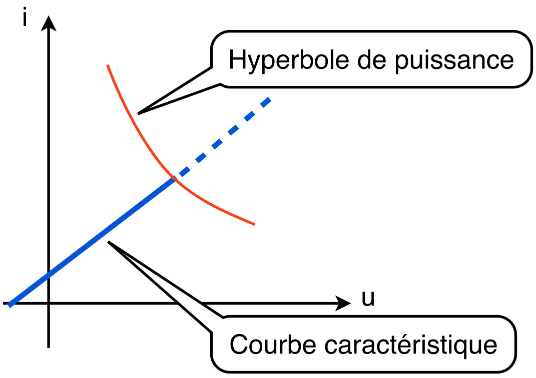
Dipôle en convention générateur

Notes



<u>Remarque</u> : si deux dipôles sont reliés entre eux, les conventions peuvent être récepteur pour l'un et générateur pour l'autre :

A.1.4.2. <u>Relation courant-tension</u>



Les grandeurs électriques d'un dipôles suivent une relation $u = f(i)$ ou $i = f(u)$. Cette relation dépend du dipôle.

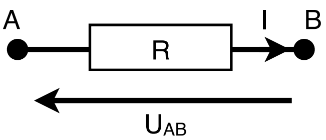
La représentation graphique de cette relation dans le plan (u,i) ou (i,u) est appelée <u>*courbe caractéristique*</u> du dipôle.

Remarque : si cette courbe passe par l'origine, alors le dipôle est dit <u>*passif*</u>. Sinon il sera dit <u>*actif*</u>.

L'hyperbole de puissance traduit les limites techniques de fonctionnement du dipôle en terme de puissance.

A.1.4.3. <u>Dipôles élémentaires</u>

Résistance (conducteur ohmique)

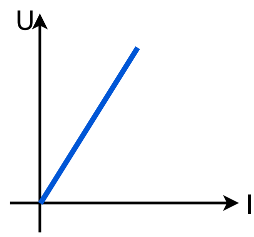


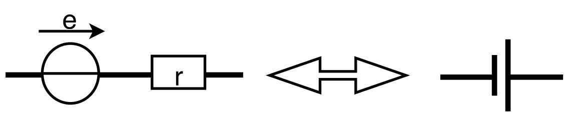
En convention récepteur, la relation caractéristique s'écrit :

$$U_{AB} = RI \text{ ou } I = GU_{AB}$$: **Loi d'Ohm**

R est la résistance, exprimée en Ohm (Ω)

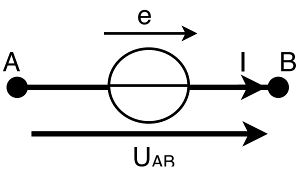
G est la conductance, exprimée en Siemens (S)





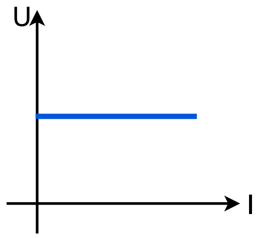
Notes

Source idéale de tension

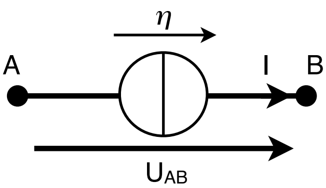


Quel que soit le courant I, la tension $U_{AB} = e$

e est appelée *force électromotrice* (fém).

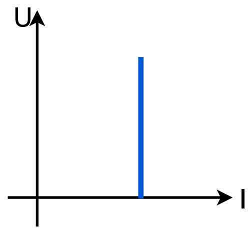


Source idéale de courant

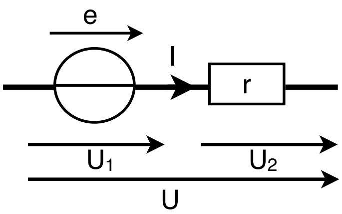


Quelle que soit la tension U_{AB}, le courant $I = \eta$

η est appelé *courant électromoteur*.

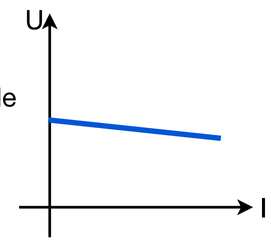


Source réelle de tension

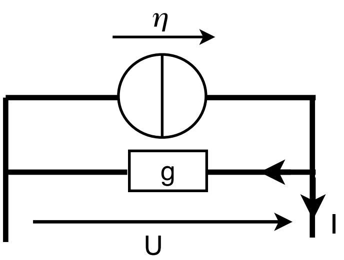


Une source de tension réelle est constituée d'une source de tension parfaite et d'un résistance interne r en série.

$$U = U_1 + U_2 = e - rI$$

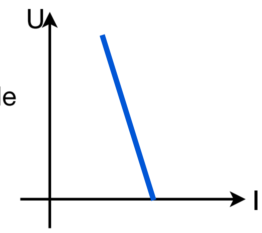


Source réelle de courant



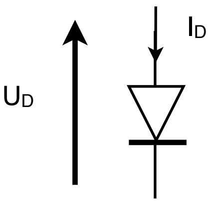
Une source de courant réelle est constituée d'une source de courant parfaite et d'un conductance interne g en parallèle.

$$I = \eta - gU$$



Notes

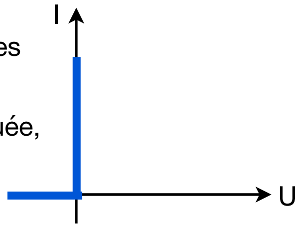
Diode idéale



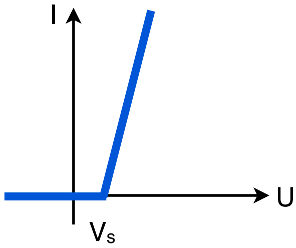
Une diode est un dipôle unidirectionnel, dont les bornes sont appelées Anode (A) et Cathode (K).

Si $U_D<0$ alors la diode est dite en polarisation inverse. Elle est bloquée, et se comporte comme un interrupteur ouvert.

Si $U_D>0$ alors la diode est dite en polarisation directe. Elle est passante, sa résistance est nulle, et elle se comporte comme un interrupteur fermé.



Diode réelle



Une diode réelle possède :

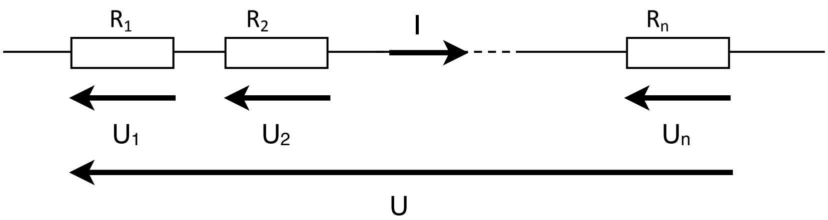
- une résistance interne, appelée résistance dynamique R_s
- une tension de seuil V_s, au delà de laquelle la diode devient passante

A.2. Méthodes d'étude

A.2.1. Association en série

L'association en série de dipôles s'appuie sur l'additivité des tensions le long d'une branche

A.2.1.1. Association de résistances en série

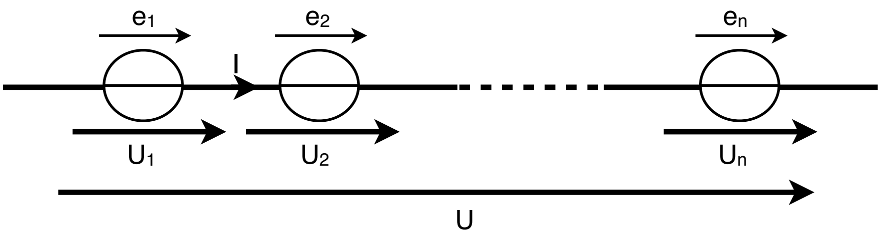


$$U=\sum_{i=1}^{n} U_i=\sum_{i=1}^{n}(R_i I)=\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right) I=R_{eq} I$$

La résistance équivalente à n résistances connectées en série vaut : $R_{eq}=\sum_{i=1}^{n} R_i$

Notes

A.2.1.2. Association de sources de tension



$$U=\sum_{i=1}^{n}U_i=\sum_{i=1}^{n}e_i$$

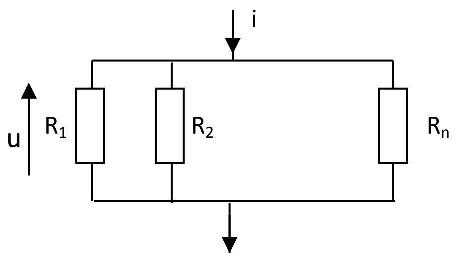
La fém équivalente à n fém connectées en série vaut : $e_{eq}=\sum_{i=1}^{n}e_i$

A.2.1.3. Association de sources de courant

L'association en série de sources de courant **n'a aucun sens**

A.2.2. Association en parallèle

A.2.2.1. Association de résistances

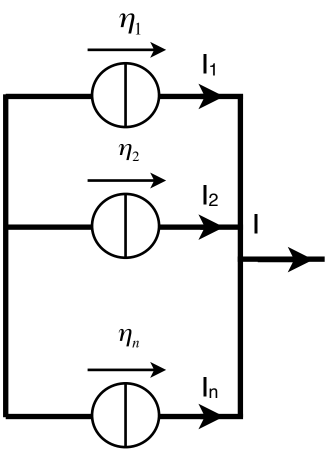


$$I=\sum_{i=1}^{n}(G_iU)=\left(\sum_{i=1}^{n}G_i\right)U=G_{eq}I$$

La conductance équivalente à n résistances connectées en parallèle vaut :

$$G_{eq}=\sum_{i=1}^{n}G_i$$

A.2.2.2. Association de sources de courant

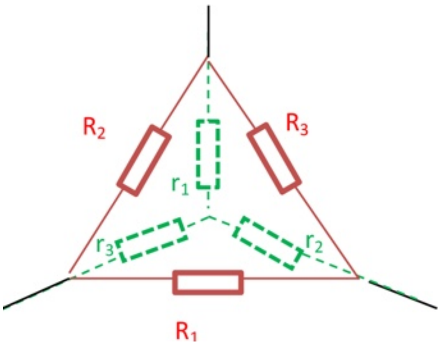


$$I=\sum_{i=1}^{n}I_i=\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

Le courant électromoteur équivalent à n courants électromoteurs connectés en parallèle vaut : $\eta_{eq}=\sum_{i=1}^{n}\eta_i$

Notes

A.2.3. Association étoile-triangle (théorème de Kennely)



Dans certains cas les dipôles sont associés en «étoile» ou en «triangle».

Le passage de la structure en triangle vers la structure en étoile est donné par :

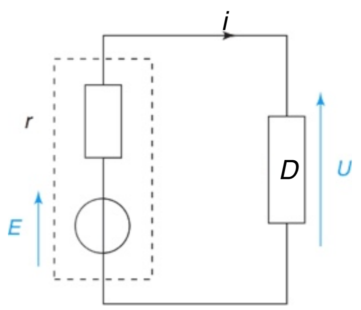
$$r_1 = \frac{R_2.R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

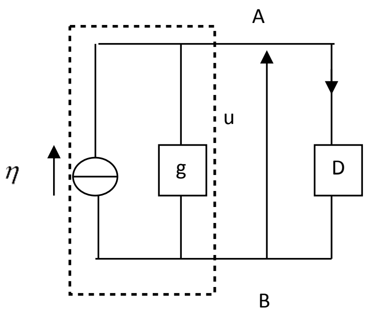
Le passage de la structure en étoile vers la structure en triangle est donnée par :

$$G_1 = \frac{g_2.g_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

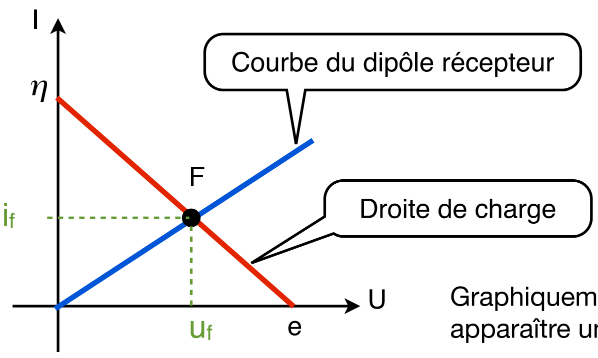
A.2.4. Point de fonctionnement d'un dipôle

A.2.4.1. Généralités





On considère un dipôle récepteur est connecté à un dipôle générateur (e,r) ou (η,g) . Il existe alors un point de fonctionnement spécifique au couplage.



La relation caractéristique du générateur est appelée *droite de charge* :

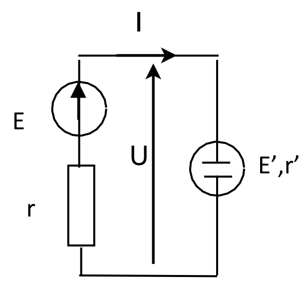
$u = e - ri$ dans le cas d'un générateur de tension

$i = \eta - gu$ dans le cas d'un générateur de courant

Graphiquement, le couplage entre le dipôle générateur et le dipôle récepteur fait apparaître un point de fonctionnement F.

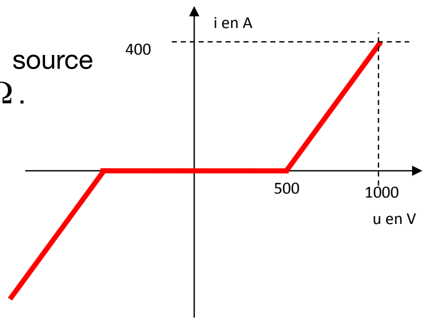
Notes

A.2.4.2. <u>Exemple 1 : Electrolyseur</u>



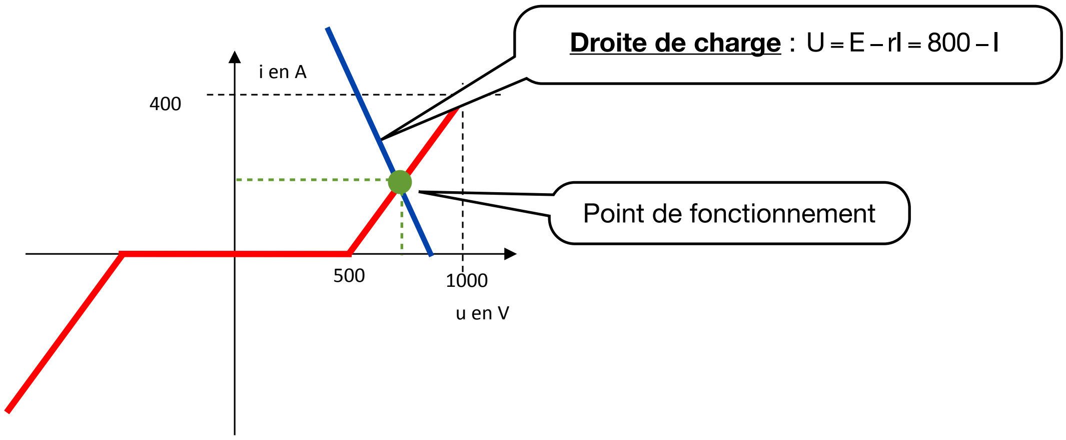
On considère un électrolyseur alimenté par une source de tension (fém E = 800 V , résistance interne $r = 1\Omega$.

La courbe caractéristique de l'électrolyseur est fournie ci-contre :



On cherche à déterminer le point de fonctionnement de ce montage.

Résolution graphique



Résolution analytique

La droite de charge a pour équation

$U = E - rI = 800 - I$ (1)

La courbe caractéristique de l'électrolyseur a pour équation :

$U < -500$: $I = 0{,}8U + 400$ (2.1)

$-500 < U < 500$: $I = 0$ (2.2)

$U > 500$: $I = 0{,}8U - 400$ (2.3)

Résolution du système d'équations :

(1) et (2.1) => {U=222,2 V et I= 577,8 A} Impossible

(1) et (2.2) => {U=800 V et I= 0 A} Impossible

(1) et (2.3) => {U=666,7 V et I= 133,3 A}

Notes

A.2.5. Puissance

A.2.5.1. Définition

La puissance instantanée reçue par un dipôle en convention récepteur est égale au produit $P = UI$, où :

- P est la puissance reçue par le dipôle (en Watt W)
- U est la tension aux bornes du dipôle (V)
- I est le courant traversant ce dipôle (A)

Ainsi :

- un dipôle a un caractère récepteur si la puissance reçue est positive
- un dipôle a un caractère générateur si la puissance reçue est négative

A.2.5.2. Bilan des puissances dans un circuit électrique

La puissance, au même titre que l'énergie, se conserve.

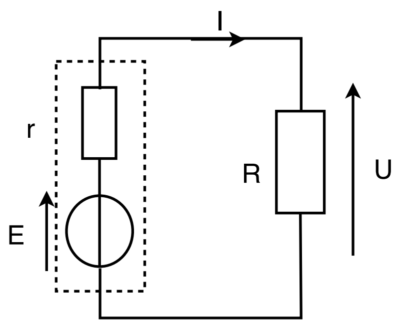
La somme des puissances reçues par l'ensemble des dipôles d'un circuit est nulle

A.2.5.3. Effet Joule dans une résistance

Le passage d'un courant dans une résistance provoque une dissipation d'énergie sous forme thermique : c'est l'effet Joule.

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

A.2.5.4. Exemple : transfert de puissance



On considère un générateur de fém $E = 10V$ et de résistance interne $r = 5\Omega$. Ce générateur est couplé à une résistance $R = 5\Omega$

Calcul de la tension U aux bornes de la résistance, et de l'intensité I

$$\begin{cases} U = E - rI \\ U = RI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{E}{R+r} \\ U = \dfrac{R}{R+r}E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = 1\,A \\ U = 5\,V \end{cases}$$

Calcul des puissances dissipées par effet Joule

$P_R = UI = 5\,W$

$P_r = rI^2 = 5\,W$

Calcul de la puissance reçue par le générateur idéal de tension

$P_E = -EI = -10\,W$ (négative car E et I sont dans le même sens, le générateur fournit de la puissance)

Bilan des puissances transitant dans le circuit

La somme des puissances vaut :

$P_E + P_R + P_r = -10 + 5 + 5 = 0$: on vérifie bien que le bilan des puissances est nul

Notes

B. Etude des réseaux en régime permanent

B.1. Méthodes de Kirchhoff

B.1.1. Définition

Les méthodes de Kirchhoff consistent à déterminer les courants circulant dans l'ensemble des branches d'un circuit électrique.

Les équations de Kirchhoff s'écrivent :

Loi de mailles :

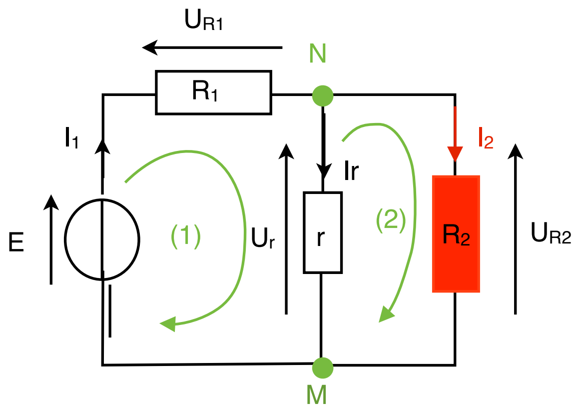
La somme algébrique des tensions dans une maille est nulle : $\boxed{\sum u = 0}$

Loi de noeuds :

La somme algébrique des courants transitant par un noeud est nulle : $\boxed{\sum i = 0}$

B.1.2. Exemple

On considère le circuit suivant, dans lequel on cherche à calculer le courant I_2 dans la charge R_2 :



Il est constitué de 2 mailles (1) et (2), et de 2 noeuds N et M

Loi de la maille (1) : $E - U_{R1} - U_R = 0$

Loi de la maille (2) : $U_r - U_{R2} = 0$

Loi du noeud N : $I_1 - I_r - I_2 = 0$

Lois d'Ohm : $\begin{cases} U_{R1} = R_1 I_1 \\ U_r = r I_r \\ U_{R2} = R_2 I_2 \end{cases}$

On arrive alors au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E - R_1 I_1 - r(I_1 - I_2) = 0 \\ r(I_1 - I_2) - R_2 I_2 = 0 \end{cases} \quad \text{qui s'écrit} \quad \begin{cases} E = (R_1 + r) I_1 - r I_2 \\ (R_2 + r) I_2 = r I_1 \end{cases}$$

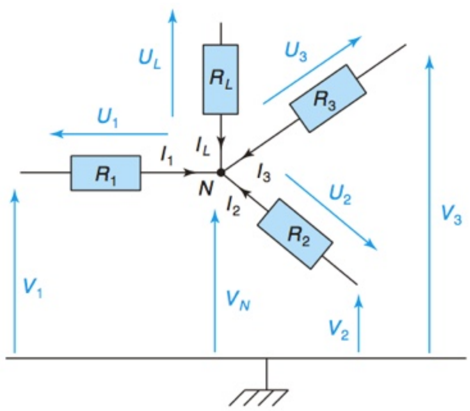
Notes

Soit au final : $\begin{cases} I_1 = \dfrac{R_2 + r}{(R_1+R_2)r + R_1R_2}E \\ I_2 = \dfrac{r}{(R_1+R_2)r + R_1R_2}E \end{cases}$

B.2. Théorème de Millmann

B.2.1. Enoncé

Le théorème de Millmann est également appelé **loi des noeuds en terme de potentiel.**



La loi des noeuds de Kirchoff s'écrit au noeud N :

$$\sum I_i = 0$$

$$\sum G_i U_i = 0$$

Or $U_i = V_i - V_N$

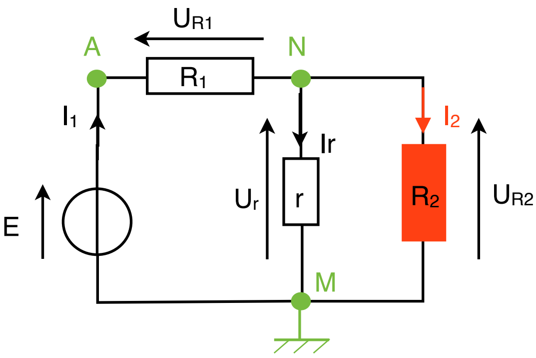
Donc $\sum G_i (V_i - V_N) = 0$

D'où le théorème de Milmann :

$$\boxed{V_N = \frac{\sum G_i V_i}{\sum G_i}}$$

<u>Remarque</u> : si des branches contiennent des sources de courant, il suffit de remplacer le terme $G_i V_i$ par la valeur du courant électromoteur (cém) des branches en question.

B.2.2. Exemple



Reprenons le circuit décrit au B.1.2, et plaçons-y arbitrairement une référence de tension («masse») en M : $V_M = 0$

Alors $V_A = E$

Appliquons le théorème de Millmann en N :

$$V_N = \frac{G_1V_A + G_rV_M + G_2V_M}{G_1 + G_2 + G_r} = \frac{G_1E}{G_1 + G_2 + G_r}$$

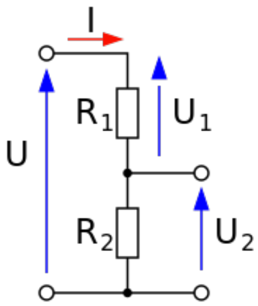
Notes

soit : $V_N = \dfrac{rR_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}E$

D'où on tire directement : $\begin{cases} I_2 = G_2V_N = \dfrac{r}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}E \\ I_r = G_rV_N = \dfrac{R_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}E \\ I_1 = G_1\left(V_N - E\right) = \dfrac{r + R_2}{rR_1 + rR_2 + R_1R_2}E \end{cases}$

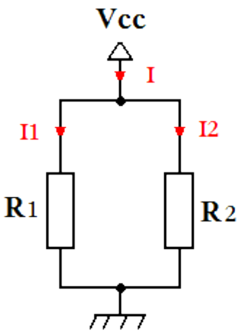
B.3. Montages particuliers

B.3.1. Diviseur de tension



$U_2 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}U$

B.3.2. Diviseur de courant



$I_2 = \dfrac{G_2}{G_1 + G_2}I$

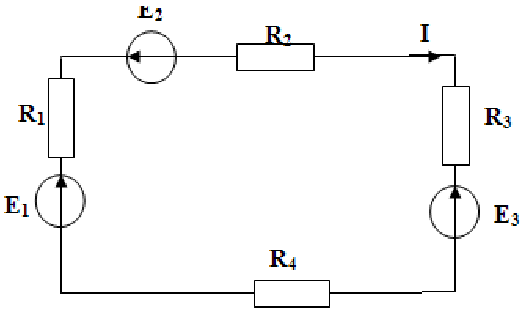
Notes

B.3.3. Loi de Pouillet

Dans un circuit ne comportant qu'une seule maille, le courant est fourni par la relation :

$$I = \frac{\sum E}{\sum R}$$ (la somme des tensions étant une somme <u>algébrique</u>)

Exemple :



$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

B.4. Circuits équivalents au sens de Thévenin et Norton

B.4.1. Théorème de Thévenin

B.4.1.1. <u>Définition</u>

Ce théorème affirme que toute portion d'un circuit électrique peut être réduite à un seul générateur de tension de fém V_{Th} en série avec une seule résistance R_{Th} . Ce théorème permet de simplifier grandement l'étude d'un circuit, et ainsi de calculer l'intensité parcourant une branche.

Il est applicable aussi bien en régime continu qu'en régime sinusoïdal, les résistances devenant des impédances.

B.4.1.2. <u>Détermination de la tension de Thévenin</u>

La tension de Thévenin V_{Th} du circuit à réduire est la tension à vide (sans la charge, donc sans les autres éléments du circuit).

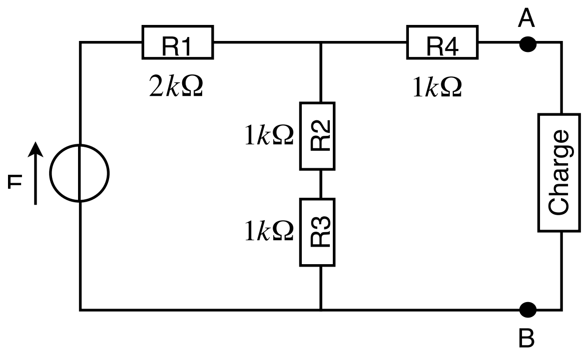
B.4.1.3. <u>Détermination de la résistance de Thévenin</u>

La résistance de Thévenin R_{Th} est la résistance équivalente du circuit à réduire lorsque les sources sont rendues passives.

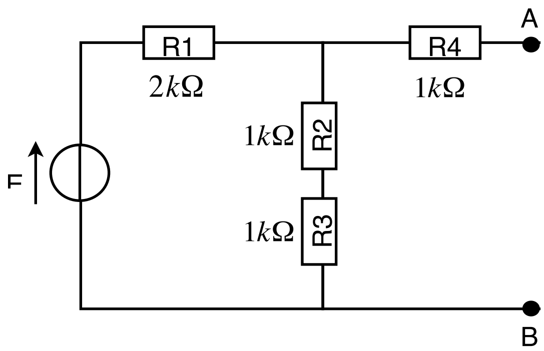
Notes

B.4.1.4. Exemple

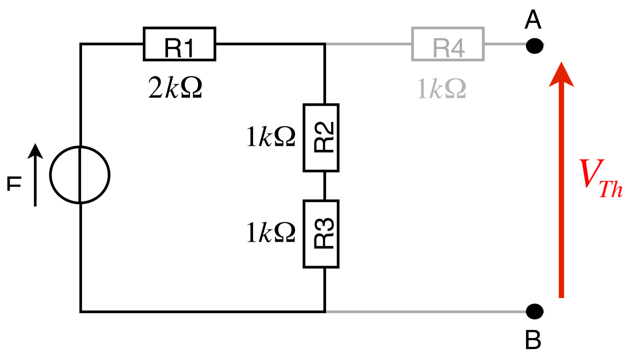
On considère le circuit suivant, dans lequel on souhaite étudier le courant traversant la charge entre A et B, avec E=10V.



Première étape : déconnexion de la charge



Seconde étape : Calcul de la tension de Thévenin équivalente



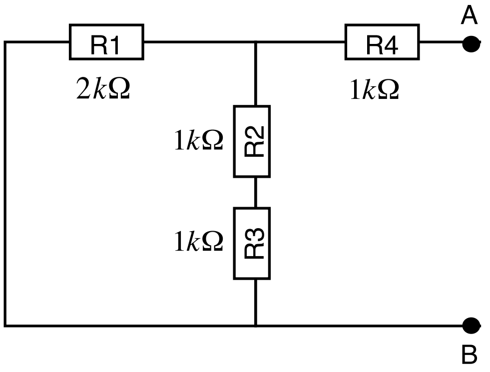
La résistance R_4 n'est pas prise en compte car, la charge étant déconnectée, aucun courant ne la traverse.

Diviseur de tension :

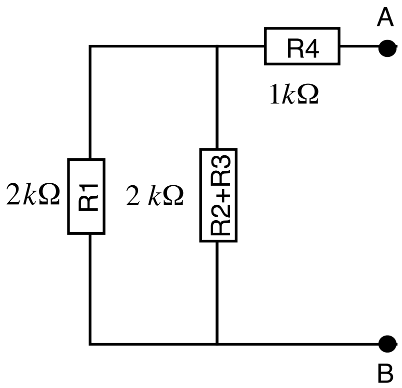
$$V_{Th} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} E = 5\ V$$

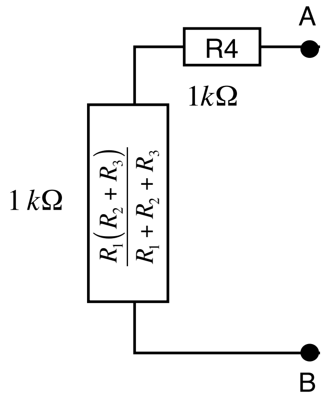
Notes

Troisième étape : Calcul de la tension de Thévenin équivalente du circuit à réduire



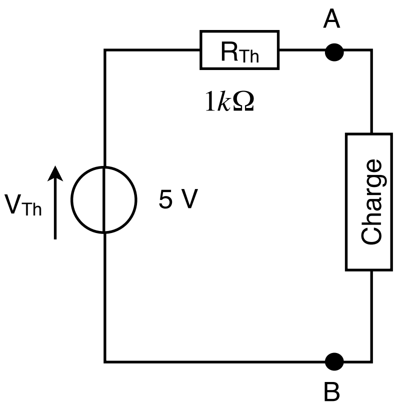
La source de tension est rendue passive, et on calcule la résistance équivalente :





D'où au final $R_{Th} = 2\ k\Omega$

Circuit équivalent de Thévenin :



B.4.2. Théorème de Norton

B.4.2.1. Définition

Le théorème de Norton établit que toute portion d'un circuit électrique peut être réduite à un seul générateur de courant en parallèle avec une seule résistance.

A l'instar du théorème de Thévenin, il est aussi bien applicable en régime continu qu'en régime sinusoïdal.

Notes

B.4.2.2. Détermination du courant de Norton

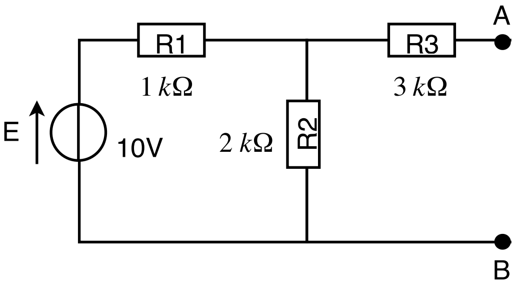
Le courant de Norton I_N est le courant traversant la charge lorsque cette dernière est court-circuitée.

B.4.2.3. Détermination de la résistance de Thévenin

La résistance de Norton R_N est la résistance équivalente du circuit à réduire lorsque les sources sont rendues passives (sources de tension court-circuitées et sources de courant débranchées).

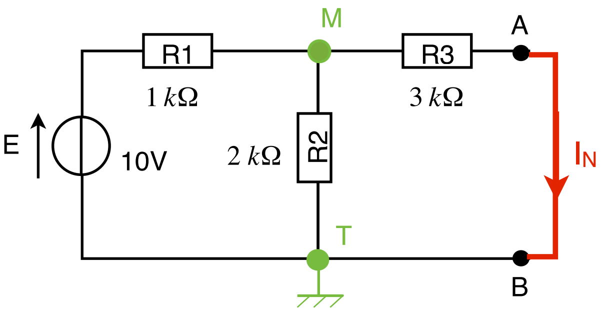
B.4.2.4. Exemple

On considère le circuit suivant, que l'on souhaite réduire à un circuit de Norton équivalent :



$$G_1 = 1.10^{-3}\ S$$
$$G_2 = 5.10^{-4}\ S$$
$$G_3 = 3,\underline{3}.10^{-4}\ S$$

Première étape : calcul du courant de Norton

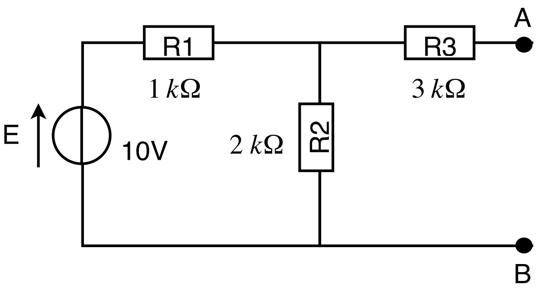


Appliquons le théorème de Millmann en M :

$$V_M = \frac{G_1E + G_2V_T + G_3V_T}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3}E$$

Or $I_N = G_3V_M = \frac{G_1G_3}{G_1 + G_2 + G_3}E = 1{,}8.10^{-4}E = 1{,}82\ mA$

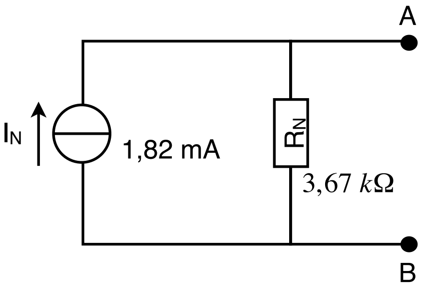
Seconde étape : calcul de la résistance de Norton



$$R_N = R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 3{,}67\ k\Omega$$

Notes

Circuit équivalent de Norton :

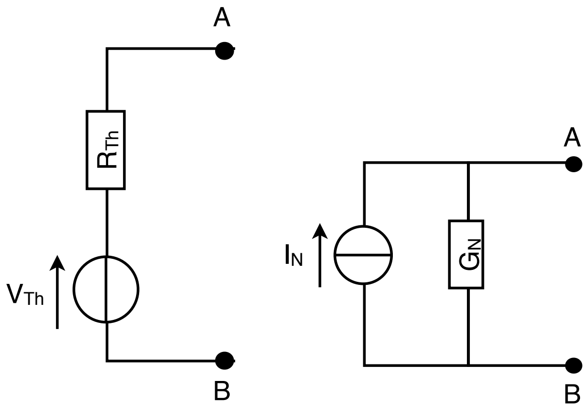


B.4.3. Equivalence Thévenin - Norton

Un générateur de tension de Thévenin (E_{Th},R_{Th}) est équivalent à un générateur de courant de Norton (I_N,G_N) avec

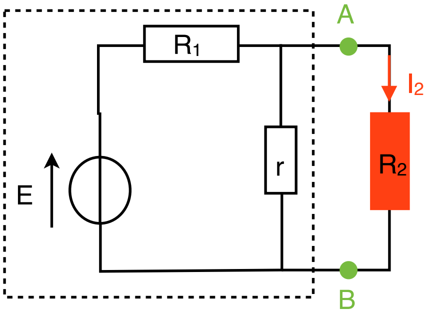
$$G_N = \frac{1}{R_{Th}}$$

$$I_N = G_N E_{Th}$$



Notes

B.4.4. Exemple



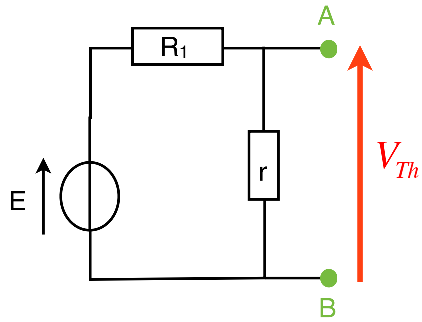
Reprenons le circuit étudié aux paragraphes B.1.2 et B.2.2, dont nous allons réduire une partie du circuit en générateur de Thévenin;

Tension de Thévenin

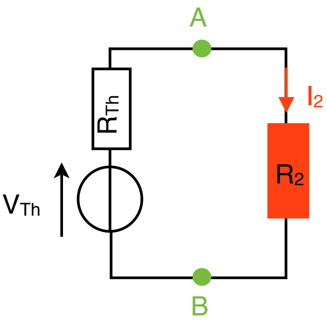
Diviseur de tension : $V_{Th} = \dfrac{r}{r+R_1}E$

Résistance de Thévenin

Résistances en parallèle : $R_{Th} = \dfrac{rR_1}{r+R_1}$



D'où la résolution du problème :



Loi de Pouillet : $I_2 = \dfrac{V_{Th}}{R_{Th}+R_2}$

$$I_2 = \dfrac{\dfrac{r}{r+R_1}E}{\dfrac{rR_1}{r+R_1}+R_2} = \dfrac{r}{rR_1+rR_2+R_1R_2}E$$

Notes

C. Etude des réseaux en régime transitoire

C.1. Définition du régime transitoire

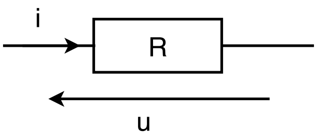
On appelle **régime permanent** tout régime dont les caractéristiques se maintiennent au cours du temps (régime continu, régime sinusoïdal, ...)

On appelle **régime transitoire** le passage d'un régime permanent à un autre régime permanent.

Ce régime transitoire sera caractérisé, entre autres, par sa constante de temps (appelée également temps de relaxation).

C.2. Relations courant-tension des dipôles élémentaires

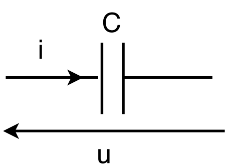
C.2.1. Conducteur ohmique de résistance R



Relation $u = f(i)$: $u = Ri$

Energie dissipée : $w = \int ui\,dt = R\int i^2\,dt$

C.2.2. Condensateur de capacité C



Relation $u = f(i)$: $i = C\dfrac{du}{dt}$

Energie stockée : $w = \int ui\,dt = \int uC\dfrac{du}{dt}dt = C\int u\,du$

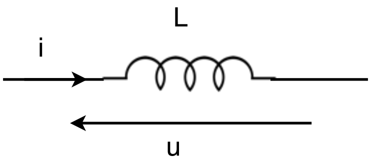
$$w = \frac{1}{2}Cu^2$$

Remarques :

1. La tension u est impérativement une variable continue, un condensateur n'acceptant pas de discontinuité de tension à ses bornes
2. En régime permanent (u constant), i=0 et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
3. En régime périodique établi, la tension moyenne aux bornes d'un condensateur est nulle.
4. Un condensateur a un comportement de type «source de tension»
5.

Notes

C.2.3. Bobine d'inductance L



Relation $u = f(i)$: $u = L\dfrac{di}{dt}$

Energie stockée : $w = \int u i dt = \int i L \dfrac{di}{dt} dt = L \int i di$

$$w = \frac{1}{2} L i^2$$

Remarques :

1. Le courant i est impérativement une variable continue, il ne peut y avoir de discontinuité de courant traversant une bobine
2. En régime permanent (i constant), u=0 et la bobine se comporte comme un interrupteur fermé.
3. En régime période établi, l'intensité moyenne traversant la bobine est nulle.
4. Une bobine a un comportement de type «source de courant»

C.3. Méthode de résolution

C.3.1. Ordre des systèmes

L'étude du régime transitoire des réseaux électriques aboutit le plus souvent à l'écriture d'équations différentielles. Le circuit électrique sera alors dit :

- du premier ordre si le comportement est décrit par un seul paramètre, et régi par des équations différentielles du premier ordre
- du second ordre si le comportement est décrit par deux paramètres, et régi par des équations différentielles du second ordre

C.3.2. Méthode générale

C.3.2.1. Perturbation du circuit électrique

Un régime transitoire s'installe quand le circuit électrique est modifié (ouverture/fermeture d'un interrupteur par exemple, application d'une tension ou d'un courant, ...).

Cette modification sera appelée «perturbation» du régime précédemment stable, et se retrouve dans le second membre de l'équation différentielle.

Notes

C.3.2.2. Résolution des équations

La solution générale de l'équation se fait en deux temps :

1. Détermination de la solution homogène (sans second membre) : il s'agit du **régime libre**. Du fait de l'amortissement induit par les résistances, le régime libre est une fonction décroissante du temps
2. Détermination de la solution particulière (avec second membre) : il s'agit du **régime forcé**. Le régime forcé est celui que cherche à imposer la perturbation, et qui s'établit quand le régime devient permanent.

C.3.2.3. Constantes d'intégration

La résolution des équations différentielles implique l'existence de constantes d'intégration (dont le nombre est égal à l'ordre du système).

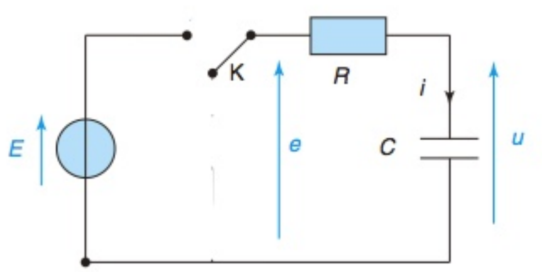
On utilise les valeurs qui ne peuvent subir de discontinuité de valeur :

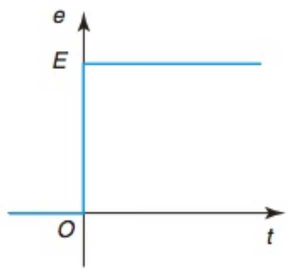
- valeur du courant dans une bobine
- valeur du courant aux bornes d'un condensateur

C.3.3. Exemple de circuit du premier ordre

On considère le circuit «RC» ci-dessous, dans lequel les conditions initiales sont $u_0 = 0$

On ferme l'interrupteur à l'instant t=0.





C.3.3.1. Mise en équation

Loi de l'unique maille : $-E+Ri+u=0$

Relation caractéristique du condensateur : $i=C\dfrac{du}{dt}$

D'où la relation (on privilégiera l'écriture $x+\tau\dfrac{dx}{dt}$, où τ est la constante de temps)

$$\boxed{u+RC\frac{du}{dt}=E}$$

Notes

C.3.3.2. Régime libre (solution homogène)

Le régime libre est régi par l'équation :

$$u + RC\frac{du}{dt} = 0 \qquad \text{(Equation caractéristique : } 1 + \tau r = 0\text{)}$$

dont la solution est de la forme :

$$u_l(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$ où A est une constante qui sera déterminée à l'aide des conditions initiales

C.3.3.3. Régime forcé (solution particulière)

On cherche une solution de la même forme que le second membre de l'équation différentielle, donc ici une constante :

$$u_f(t) = K$$

On remplace cette expression dans l'équation différentielle :

$$K + RC\frac{dK}{dt} = E \quad \text{soit} \quad K = E$$

C.3.3.4. Solution globale

La solution globale de l'équation est la somme du régime libre et du régime forcé :

$$u(t) = u_l(t) + u_f(t)$$

$$u(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + E$$

Les conditions initiales à t=0 permettent de définir la variable d'intégration A :

$$u(O^+) = u_0$$
$$A + E = 0$$

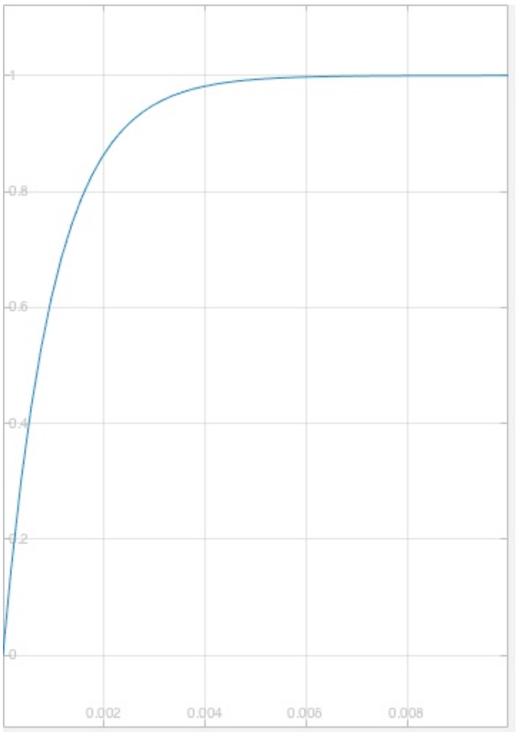
D'où la solution finale :

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$$

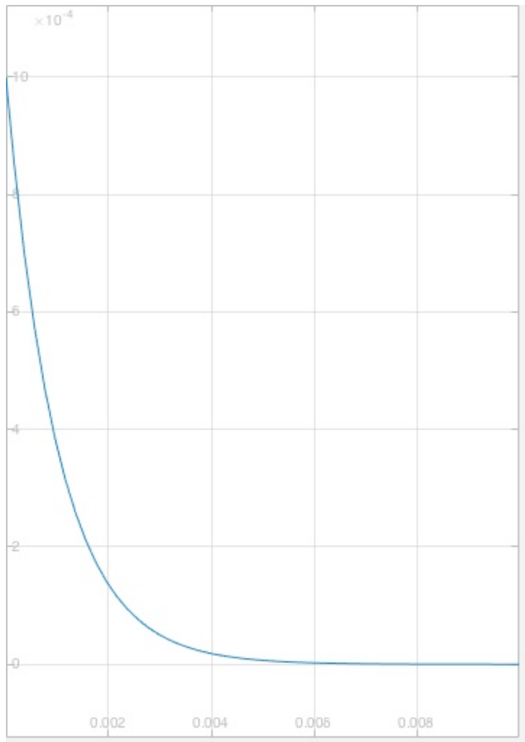
et l'expression de l'intensité est :

$$\boxed{i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

Notes



Courbe $u(t)$

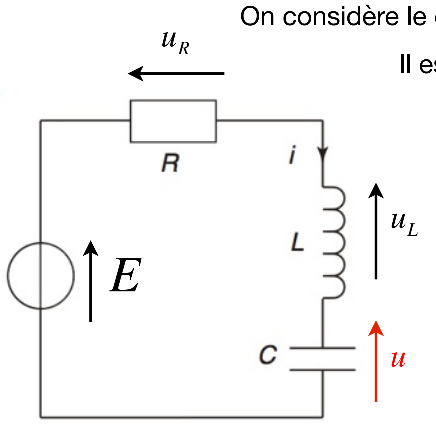


Courbe $i(t)$

C.3.4. Exemple de circuit du second ordre

C.3.4.1. Equation différentielle

On considère le circuit «RLC» ci-contre., soumis à un échelon de tension e à t=0.



Il est régi par les équations :

$$-E + u_R + u_L + u = 0 \quad \text{(loi de la maille)}$$

avec
$$\begin{cases} u_R = Ri \\ u_L = L\dfrac{di}{dt} \\ i = C\dfrac{du}{dt} \end{cases}$$

Notes

L'équation devient alors :

$$-E+RC\frac{du}{dt}+LC\frac{d^2u}{dt^2}+u=0$$

D'où l'équation différentielle :

$$\boxed{LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=E}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{du}{dt}+u=E$$

où $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit (en rad.s^{-1})

$m=\frac{R}{2L\omega_0}$ est le coefficient d'amortissement (sans unités)

Remarque : $Q=\frac{1}{2m}$ est appelé facteur de qualité

C.3.4.2. Régime libre (solution de l'équation homogène)

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est :

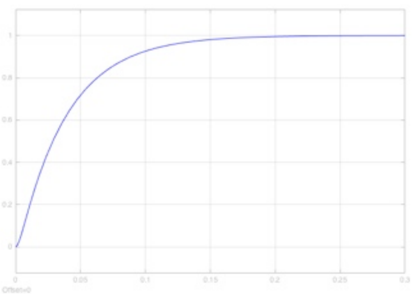
$$\frac{1}{\omega_0^2}r^2+\frac{2m}{\omega_0}r+1=0$$ dont le discriminant réduit vaut $\Delta'=\frac{m^2-1}{\omega_0^2}$

En fonction de la valeur du coefficient d'amortissement, les racines de l'équation seront de nature différente :

1. si $m>1$: les racines sont réelles, le régime est **apériodique**
2. si $m<1$: les racines sont complexes, le régime est **pseudo-périodique**
3. si $m=1$: une seule racine réelle, le régime est **critique**

Notes

Cas où m>1



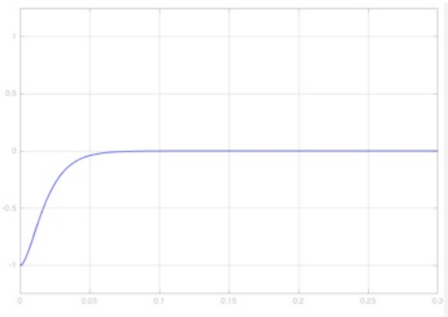
On note r_1 et r_2 les deux racines réelles :

$$r = \left(-m \pm \sqrt{m^2-1}\right)\omega_0$$

La solution de l'équation homogène est alors :

$$\boxed{u_l(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}}$$

Cas où m=1



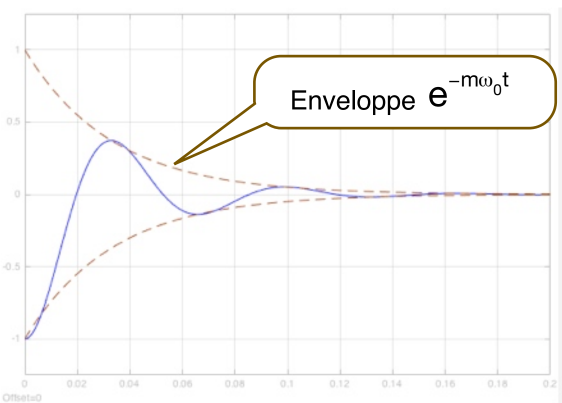
On note Rr la racine réelle :

$$r = -\omega_0$$

La solution de l'équation homogène est alors :

$$\boxed{u_l(t) = e^{rt}\left(B_1 t + B_2\right)}$$

Cas où m<1



On note r_1 et r_2 les deux racines complexes conjuguées :

$$r = \left(-m \pm j\sqrt{1-m^2}\right)\omega_0 = \left(-1 \pm j\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)m\omega_0$$

La solution de l'équation homogène est alors :

$$u_l(t) = e^{-m\omega_0 t}\left[C_1 \cos\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right) + C_2 \sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)\right]$$

$$\boxed{u_l(t) = C_1 e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t + \varphi\right)}$$

Notes

C.3.4.3. Régime forcé (solution de l'équation particulière)

Le second membre est une constante, donc on cherche une solution du type :

$$u_f(t)=K$$

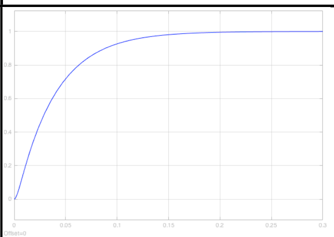
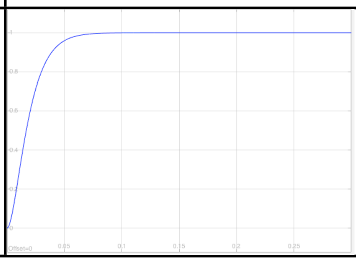
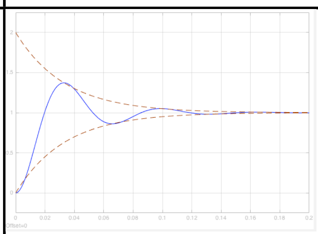
En remplaçant dans l'équation différentielle, on arrive à :

$$E=\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{du}{dt}+u=K$$

C.3.4.4. Solution globale

Les conditions initiales sont :

- Avant la fermeture de l'interrupteur, la tension aux bornes du condensateur est nulle s'il est déchargé. Donc $u(0^-)=0$. Comme il ne peut subir de discontinuité de tension, alors $u(0^+)=0$
- De même, l'intensité traversant la bobine est nulle : $i(0^-)=0$. Une bobine ne pouvant subir de discontinuité, on en déduit $i(0^+)=0$

	Cas où m>1	**Cas où m=1**	**Cas où m<1**
Equations	$u(t)=E+A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$ $\frac{i(t)}{C}=\frac{du(t)}{dt}=A_1r_1e^{r_1t}+A_2r_2e^{r_2t}$	$u(t)=E+e^{rt}\left(B_1t+B_2\right)$ $\frac{i(t)}{C}=re^{rt}\left(B_1t+B_2\right)+B_1e^{rt}$	$u(t)=E+C_1e^{-m\omega_0t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t+\varphi\right)$ $\frac{i(t)}{C}=-C_1\omega_0e^{-m\omega_0t}\left[m\sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t+\varphi\right)-\sqrt{1-m^2}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t+\varphi\right)\right]$
Constantes	$\begin{cases}u(0)=0\Rightarrow E+A_1+A_2=0\\ i(0)=0\Rightarrow A_1r_1+A_2r_2=0\end{cases}$ $\begin{cases}A_1=\frac{r_2}{r_1-r_2}E\\ A_2=-\frac{r_1}{r_1-r_2}E\end{cases}$	$\begin{cases}u(0)=0\Rightarrow E+B_2=0\\ i(0)=0\Rightarrow B_1+rB_2=0\end{cases}$ $\begin{cases}B_1=rE\\ B_2=-E\end{cases}$	$\begin{cases}u(0)=0\Rightarrow E+C_1\sin\varphi=0\\ i(0)=0\Rightarrow -C_1\omega_0\left(m\sin\varphi-\sqrt{1-m^2}\cos\varphi\right)=0\end{cases}$ $\begin{cases}\varphi=a\tan\left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right)\\ C_1=-\frac{E}{\sqrt{1-m^2}}\end{cases}$
Courbes			

Notes