ATS

Jules Ferry

DM3 : Étude d'un sismographe

À rendre le 10/12/2024

Dans tout le problème, on considère que le référentiel d'étude, noté R, est galiléen et que $g=\|\vec{g}\|$ est uniforme. Localement le sol est mis en mouvement par rapport à R sous l'effet des secousses sismiques que l'on souhaite étudier. Ces secousses ont, en général, trois composantes : une verticale et deux horizontales. On s'intéresse uniquement dans ce problème aux secousses verticales ; on considère donc que le sol est animé par rapport à R d'un mouvement de translation rectiligne, verticale et non uniforme.

1. Un modèle de sismomètre vertical

Le sismomètre proposé est constitué d'un point matériel M de masse m, relié à un point A d'un châssis lui-même solidaire du sol en vibration dans R. La liaison de M au châssis est modélisée par un ressort de longueur $L(t)$ à l'instant t, de longueur au repos L_o, et de constante de raideur k, associé à un amortisseur exerçant sur le point matériel une force égale à : $\vec{F}_v=-h\dot{L}\vec{u}_z$, où $\dot{L}$ désigne la dérivée temporelle de $L(t)$, et $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire vertical descendant.

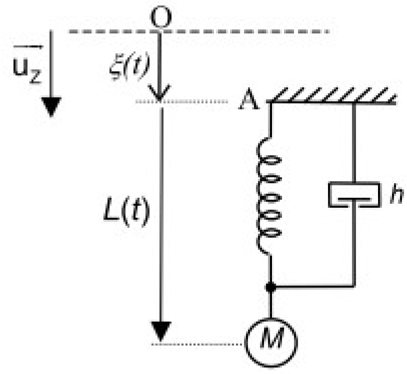

Figure 1 : Modèle de sismomètre vertical

On note O un point fixe dans le référentiel galiléen R. Le mouvement du sol par rapport au référentiel galiléen est représenté par $\xi(t)$ et le mouvement de M par rapport au châssis, donc par rapport au sol, est représenté par $L(t)$. On note L_1 la longueur du ressort à l'équilibre en l'absence de tremblement de terre (donc lorsque ξ est constamment nul).

1.1 Déterminer L_1 en fonction de m, g, k et L_o.

Dans toute la suite de cette question 1, on pose $z(t)=L(t)-L_1$, et on suppose qu'un système d'acquisition permet d'enregistrer directement $z(t)$.

1.2 Exprimer le vecteur accélération du point M dans R en fonction de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ et $\vec{u}_z$.

1.3 En présence d'une onde sismique, le point A est animé d'un mouvement qu'on modélise ici par $\xi(t)=a\cos(\omega t)$ (onde sinusoïdale pure). Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt}+\omega_0^2 z(t)=\omega^2 a\cos(\omega t)$$

Préciser les expressions de ω_0 et Q en fonction de m, k et h.

1.4 Calculer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q sachant que : $m=10\,kg$, $k=1{,}0.10^3\,N.m^{-1}$ et $h=2{,}1.10^2\,N.m^{-1}.s$.

La réponse $z(t)$ du sismographe à l'excitation $\xi(t)=a\cos(\omega t)$ est égale à la somme d'un terme transitoire $z_{RT}(t)$, et d'un terme correspondant au régime sinusoïdal forcé (ou permanent sinusoïdal), noté $z_{RSF}(t)$.

1.5 1.5.1. Déterminer la valeur Q_C du facteur de qualité Q pour laquelle le régime transitoire est apériodique critique.

1.5.2. Quelle est alors, pour cette valeur Q_C de Q, la forme générale du terme transitoire $z_{RT}(t)$?

Dans la suite, on s'intéresse au régime sinusoïdal forcé, pour lequel la solution est de la forme $z(t)=b\cos(\omega t+\phi)$.

1.6. 1.6.1. Établir l'expression du rapport b/a et du déphasage ϕ en fonction de la pulsation réduite $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$ et du facteur de qualité Q .

1.6.2. La figure 2 ci-contre donne l'allure du graphe de b/a en fonction de ω pour différentes valeurs de Q . Vérifier la cohérence de ce graphe avec l'expression de b/a obtenue à la question 1.6.1 en examinant les cas limites $\omega\to 0$ et $\omega\to\infty$.

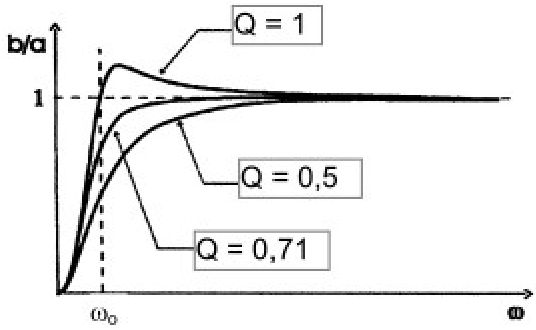

Figure 2

1.7. On pose $Y=\dfrac{b^2}{a^2}$. En exprimant Y en fonction de $x'=\dfrac{1}{x}=\dfrac{\omega_0}{\omega}$, montrer qu'il ne peut pas y avoir résonance en élongation si Q est inférieur à une valeur limite $Q_{\lim}$ que l'on déterminera.

L'utilisateur souhaite obtenir, en régime sinusoïdal forcé, une loi $z(t)$ dont l'amplitude soit, dans la mesure du possible, égale à l'amplitude du mouvement du sol.

1.8. Comment doit-il choisir la pulsation propre ω_0 par rapport à l'ordre de grandeur de la pulsation ω imposée par le séisme ?

1.9. 1.10.1. En utilisant la figure 2, expliquer quel est l'intérêt de choisir une valeur de Q proche de la valeur $Q_{\lim}$ trouvée à la question 1.7.

1.10.2. Ce choix de Q vous paraît-il compatible avec une rapidité convenable de la relaxation (i.e. avec une disparition rapide du transitoire) ?

1.10. Avec ces choix de ω_0 (question 1.8) et de Q (question 1.9), quel est le lien entre $z(t)$ et $\xi(t)$ en régime sinusoïdal forcé ?

Dans le cas où le sismographe détecte un séisme lointain, les fréquences sismiques perçues sont de l'ordre de 0,1 Hz .

1.11. 1.11.1. Quelle contrainte entre k et m est imposée, de ce fait, d'après le résultat de la question 1.8 ?
1.11.2. Que peut-on dire, dans ces conditions, de l'ordre de grandeur de l'allongement du ressort à l'équilibre (trouvé à la question 1.1) ? Commenter ce résultat.