

Les calculatrices, téléphones et montres connectées sont interdits

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les résultats littéraux seront encadrés en rouge.

Exercice 1 : Chute d'une goutte d'eau

Une petite goutte d'eau de masse m tombant dans l'atmosphère est soumise à son poids et à l'action de l'air.

On notera g la norme du champ de pesanteur terrestre.

En négligeant la poussée d'Archimède, nous supposons que cette action de l'air se réduit à des frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$. On abandonne une goutte d'eau sans vitesse initiale et en atmosphère calme (pas de vent). On admettra que le mouvement a lieu selon l'axe vertical (Oz) orienté vers le bas.

L'origine du repère O est prise à l'endroit où la goutte d'eau s'est formée : $z(t=0)=0$ et $\vec{v}(t=0)=\vec{0}$.

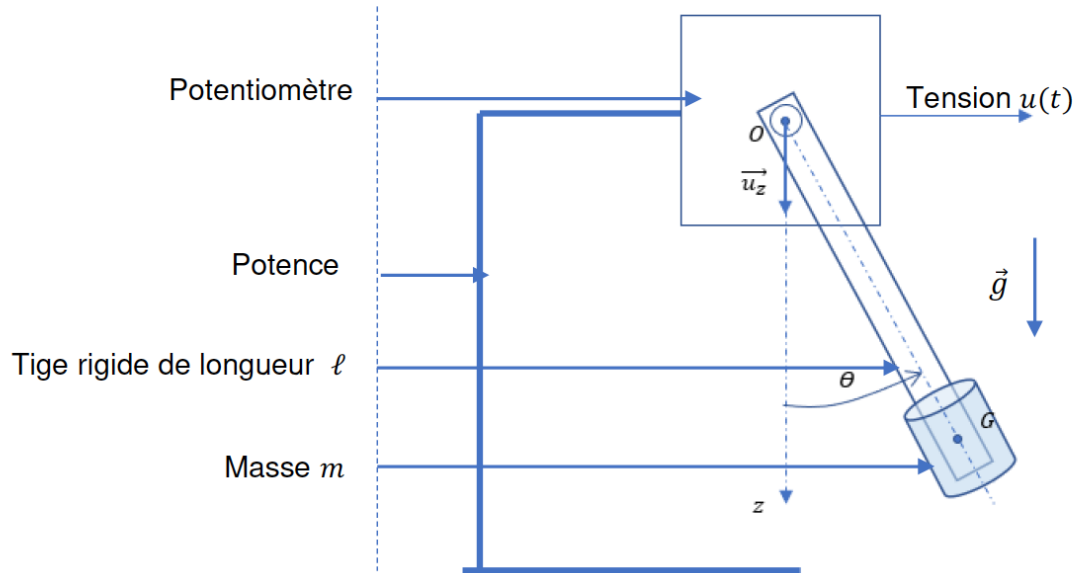
Le mouvement étant purement vertical, on appelle $v(t)$ la composante de la vitesse : $\vec{v}(t)=v(t)\vec{e}_z$.

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
2. Résoudre cette équation différentielle sachant que $v(t=0)=0$.
3. Tracer l'allure de $v(t)$ en faisant apparaître le temps caractéristique τ du problème sur le graphique. Donner les expressions littérales de τ et de la vitesse limite v_l vers laquelle tend la vitesse de la goutte en fonction des paramètres du problème.
4. Exprimer la position $z(t)$ sachant que $z(t=0)=0$.
5. Donner l'expression du temps t_f pour lequel la goutte atteint le sol en $z=D$ sachant que $t_f \gg \tau$.

Exercice 2 : Étude des oscillations harmoniques d'un pendule

a) Modélisation

On considère le dispositif dessiné ci-dessous permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur ℓ et d'une masse m fixée à son extrémité. A l'image du balancier d'une horloge ou d'une balançoire, la masse m va osciller autour du point O . La position angulaire $\theta(t)$ de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant Oz . Un potentiomètre alimenté, fixé sur une potence et solidaire de la tige en rotation, permet d'apprécier la position angulaire $\theta(t)$ de la tige en délivrant une tension $u(t) = k\theta(t)$ avec k constante.



Dans toute la suite la suite, nous allons travailler avec les hypothèses suivantes :

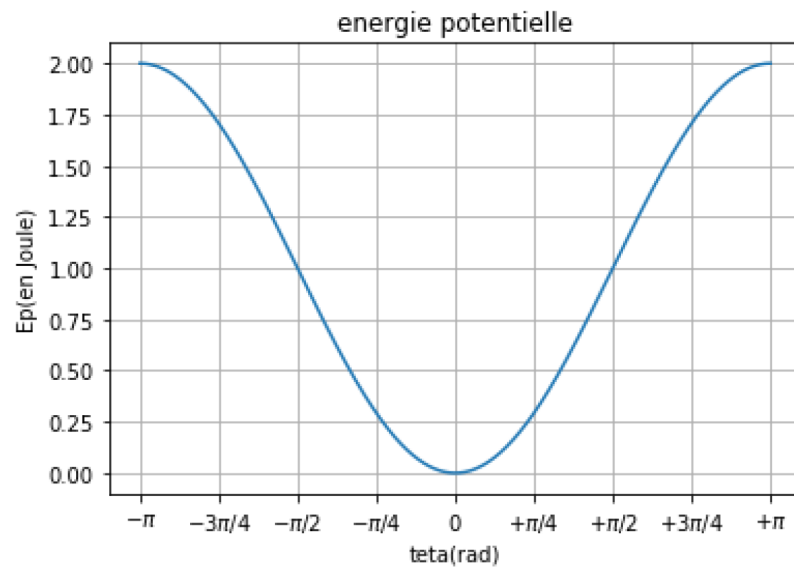
- Le mouvement du pendule est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- Les frottements de type fluide seront négligés.
- On néglige également les effets dissipatifs des actions de contact entre le potentiomètre et la tige.
- On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre tel que $\vec{g} = g\vec{u}_z$ et on néglige la poussée d'Archimède de l'air environnant.
- On néglige la masse de la tige par rapport à la masse m dont le centre de masse G est tel que $OG \approx \ell$.

Ce système oscillant est alors modélisé par un pendule simple dont l'étude se limite à celle de la masse m animée d'une vitesse algébrique v donnée par $v = \ell \frac{d\theta}{dt} = \ell \dot{\theta}$.

- 1) Etablir l'expression de l'énergie cinétique E_c de ce pendule en fonction de m , ℓ et $\dot{\theta}$.
 - 2) Etablir l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à ce pendule en fonction de m , g , ℓ et θ en prenant $E_p(\theta = 0^\circ) = 0$.
 - 3) Enoncer le théorème de la puissance mécanique. On nommera les termes intervenant dans ce théorème.
 - 4) Montrer alors que l'angle $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$. On donnera l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de g et ℓ .
 - 5) Pour cette question uniquement, on se place dans l'approximation harmonique qui impose une faible amplitude angulaire des oscillations (amplitude inférieure à 30°). Dans ces conditions, on accepte le développement limité à l'ordre 1 suivant : $\sin\theta \approx \theta$.
- Etablir l'expression de $\theta(t)$ en prenant comme conditions initiales : $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$.
 - Donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations harmoniques.
 - Représenter l'allure de $\theta(t)$ sur quelques périodes propres T_0 .

b) Partie expérimentale

On donne ci-dessous la représentation graphique de $E_p(\theta)$ du pendule étudié avec $m = 0,2 \text{ kg}$.



A $t = 0$, on lance la masse m avec une vitesse initiale $v(0) = v_0 = \sqrt{10} \text{ m.s}^{-1}$ à la position angulaire $\theta(t = 0) = 0^\circ$.

- 6) Quelle est la valeur de l'énergie mécanique E_m de la masse m ? Justifier.
- 7) Quelle sera la position angulaire maximale θ_0 atteinte par cette masse m ? Justifier.

Exercice 3 : Oscillateur mécanique élastique



Considérons un mobile supposé ponctuel de masse M astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox . Ce mobile est maintenu par un ressort à réponse linéaire dont les extrémités sont fixées à O et M .

Le ressort est défini par sa constante de raideur k et sa longueur au repos ℓ_0 .

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

1. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen.
À $t=0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).
 - a) Faire le bilan des forces appliquées au mobile lorsqu'il se trouve à un point d'abscisse x quelconque.
Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle de $x(t)$ par la deuxième loi de Newton.
 - b) De quel type de système s'agit-il ? Exprimer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 de ce système en fonction de k et M .
 - c) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

Les questions qui suivent prennent en compte l'existence de frottements lors du déplacement du mobile.

En fait, le mobile subit un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme : $\vec{f} = -\mu \vec{v}$ où μ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du mobile.

Les conditions initiales sont les mêmes que pour les questions précédentes.

2. Avec les frottements.
 - a) Établir, à l'aide de la deuxième loi de Newton, l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
 - b) Montrer que lorsque $\mu < 2\sqrt{kM}$, le mouvement est oscillatoire amorti (régime pseudo-périodique).
 - c) Donner l'expression générale de $x(t)$ dans ce cas, sans chercher à calculer les constantes d'intégration. Pour simplifier l'écriture, on introduira la pseudo-pulsation ω que l'on définira en fonction des paramètres du problème.
 - d) Exprimer la pseudo-période associée à ce mouvement.
 - e) Représenter l'allure de $x=f(t)$.