ATS

Jules Ferry

DS 2 : Thermodynamique et mécanique

Durée : 2H

20/11/2024

Les calculatrices sont interdites

***

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

***

Les résultats littéraux seront encadrés en rouge et les applications numériques soulignées en rouge si elles sont demandées sans oublier les unités des grandeurs physiques.

Exercice 1 : Étude du moteur de Stirling

On considère $n = 40$ mmol d'helium, assimilable à un gaz parfait de coefficient isentropique constant $\gamma = C_p / C_v = 1,66$, subissant un cycle modélisé par les évolutions suivantes à partir de l'état A de volume $V_A = 1$ L :

- Compression isotherme réversible au contact de la source $\mathscr{S}_f$, jusqu'à l'état B, de volume $V_B = V_A / 4$;
- Échauffement isochore au contact thermique de la source $\mathscr{S}_c$ jusqu'à l'état C ;
- Détente isotherme réversible au contact de la source $\mathscr{S}_c$ jusqu'à l'état D, de volume V_A ;
- Refroidissement isochore au contact thermique de la source $\mathscr{S}_f$ jusqu'à l'état A.

La source chaude $\mathscr{S}_c$ est maintenue à température constante $T_c = 930$ K par un bruleur alimenté en méthane et en air.
La source froide $\mathscr{S}_f$ est maintenue à température constante $T_f = 330$ K, en régime permanent de fonctionnement, par le retour d'eau froide des circuits de chauffage.

1. Réaliser un tableau où on déterminera les valeurs de volume, température et pression dans chacun des états A, B, C et D (pour les pressions, on ne donnera que les expressions).
2. Représenter l'allure du cycle en coordonnées de Clapeyron (P, V).
3. Le cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.
4. Exprimer C_v et C_p en fonction de n, R et γ.
5. Déterminer, pour la transformation $A \rightarrow B$, l'expression du travail W_{AB} et du transfert thermique Q_{AB} reçus par le gaz en fonction de n, R et T_f. Commenter le signe de W_{AB}.
6. Déterminer, pour la transformation $B \rightarrow C$, l'expression du travail W_{BC} et du transfert thermique Q_{BC} reçus par le gaz en fonction de n, R, γ, T_f et T_c. Commenter le signe de Q_{BC}.
7. En déduire l'expression de l'entropie échangée S_{ech} par le gaz au cours de la transformation $B \rightarrow C$.
8. L'entropie d'un gaz parfait prend la forme $S(T, V) = C_v \ln(T) + nR\ln(V) + cte$.
   Déterminer l'expression de la variation d'entropie du fluide ΔS_{BC}.
   Que peut-on dire de ΔS_{BC} par rapport à S_{ech} ? Que peut-on en conclure sur la transformation $B \rightarrow C$?
9. Déterminer, pour la transformation $C \rightarrow D$, l'expression du travail W_{CD} et du transfert thermique Q_{CD} reçus par le gaz.
10. Déterminer, pour la transformation $D \rightarrow A$, l'expression du travail W_{DA} et du transfert thermique Q_{DA} reçus par le gaz.
11. Exprimer le travail total W_t **<u>fourni par le moteur</u>** au cours du cycle en fonction de n, R, T_f et T_c
12. Combien de cycles N par seconde doit effectuer le moteur pour fournir une puissance P ?
13. Donner l'expression du rendement η du moteur en fonction de W_t et des transferts thermiques.

Problème : Suspension de voiture

Le véhicule étudié est modélisé par un parallélépipède, de centre de gravité G et de masse M, reposant sur une roue par l'intermédiaire de la suspension dont l'axe OG reste toujours vertical. L'ensemble est animé d'une vitesse horizontale $\vec{v}=v\vec{u}_x$.
La suspension, quant à elle, est modélisée par un ressort de raideur constante $k=1{,}0.10^5\,N.m^{-1}$ (de longueur à vide ℓ_0) et un amortisseur fluide de constante d'amortissement constante $\lambda=4{,}0.10^3\,S.I.$ La masse de l'ensemble est $M=1000\,kg$.
La position verticale du véhicule est repérée par z_G dans le référentiel galiléen proposé ayant son origine sur la ligne moyenne des déformations du sol. On note z_O la cote du centre de la roue par rapport au niveau moyen de la route.
Pour simplifier, on supposera que la longueur du ressort est $l(t)=OG(t)=z_G(t)-z_O(t)$.

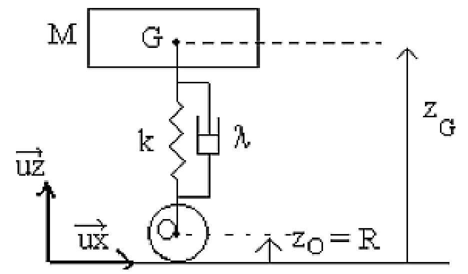
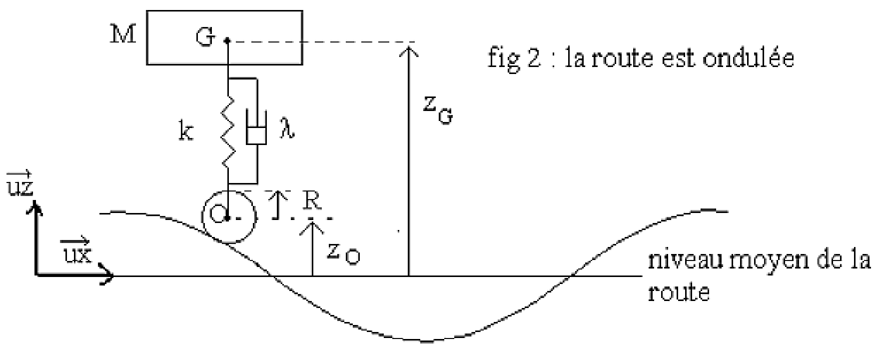


fig 1 : la route est parfaitement horizontale



L'amortissement entre M et la roue introduit une force de frottement fluide, exercée par l'amortisseur sur M, qui s'écrit : $\vec{F}=-\lambda\left(\frac{d\,z_G}{d\,t}-\frac{d\,z_O}{d\,t}\right)\vec{u}_z$.

A – La route est parfaitement horizontale (fig 1) : étude de la position d'équilibre et du régime transitoire

1. La route ne présente aucune ondulation et le véhicule n'a aucun mouvement vertical.
   Déterminer la position z_{Geq} de G lorsque le véhicule est au repos en fonction de R, k, ℓ_0, M et g.
2. Le véhicule est déplacé de sa position d'équilibre ($z_G<z_{Geq}$) puis relâché soudainement sans vitesse initiale. On cherche dans cette question à étudier le régime transitoire de la suspension.
   On étudie le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment.
   On posera $z(t)=z_G(t)-z_{Geq}$.
   a) Appliquer la deuxième loi de Newton à la masse et en déduire l'équation différentielle en z caractéristique du mouvement : $\ddot{z}+\frac{\lambda}{M}\dot{z}+\frac{k}{M}z=0$.
   b) À quelle condition sur λ, k et M, le régime transitoire est-il pseudo-périodique ?
   Faire l'application numérique afin de vérifier que le régime transitoire est bien pseudo-périodique.
   c) Dessiner, qualitativement, l'allure de la fonction $z(t)$ (la résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée).

Attention, voir suite prochaine page.

B – La route est ondulée (fig 2)

Le véhicule se déplace à vitesse horizontale constante v sur un sol ondulé. L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale L et d'amplitude A. z_O peut alors s'écrire $z_O = R + A cos(\omega t)$, avec $\omega = \frac{2\pi v}{L}$.
On étudie maintenant le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment.
On posera $z(t) = z_G(t) - z_{Geq}$.
Pour les applications numériques on prendra $L = 1{,}0\,m$; $A = 10\,cm$.

1. Quelle est l'unité S.I. de λ ?
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen, montrer que l'équation différentielle en z régissant le mouvement est :
$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{M}\dot{z} + \frac{k}{M}z = \frac{k}{M}(z_0 - R) + \frac{\lambda}{M}\frac{d(z_0 - R)}{dt}$$
3. Justifier qualitativement le fait que l'on recherche la solution $z(t)$ de cette équation différentielle sous une forme sinusoïdale $z(t) = z_{max}\cos(\omega t + \varphi)$.
4. Résolution par la méthode des complexes.
On pose $\underline{z} = \underline{Z}\, e^{j\omega t}$, réponse complexe du véhicule à l'excitation sinusoïdale et $\underline{z_O} - R = \underline{A}\, e^{j\omega t}$ avec j le complexe tel que $j^2 = -1$.
   a) Montrer que $\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{\left(\frac{k}{M} + j\omega\frac{\lambda}{M}\right)}{\left(-\omega^2 + j\omega\frac{\lambda}{M} + \frac{k}{M}\right)}$ et l'écrire sous la forme $\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$.
   Exprimer alors ω_0, ω_1 et Q en fonction de k, λ et M.
   b) Calculer numériquement ω_0, ω_1 et Q.
   c) Donner l'expression du module $\left|\frac{\underline{Z}}{\underline{A}}\right|$ en fonction de ω_0, ω_1 et Q.
5. ω_r, valeur de ω pour laquelle l'amplitude est maximale, est de l'ordre de grandeur de ω_0. Quelle est la valeur de v correspondante ?
Calculer l'amplitude des oscillations du véhicule pour $\omega = \omega_0$.
6. Application :
Dans le film « le salaire de la peur », Yves Montand conduit un camion ($\omega_0 \approx 10$ rad.s^{-1}) chargé de nitroglycérine. Il passe sur une tôle ondulée de période spatiale 1 m et pour laquelle A = 10 cm. Afin d'éviter l'explosion du chargement, doit-il traverser la taule à une vitesse inférieure à 5 km.h^{-1} ou supérieure à $50\,km.h^{-1}$? Justifier qualitativement ceci à l'aide des résultats précédents.