

Les calculatrices sont interdites

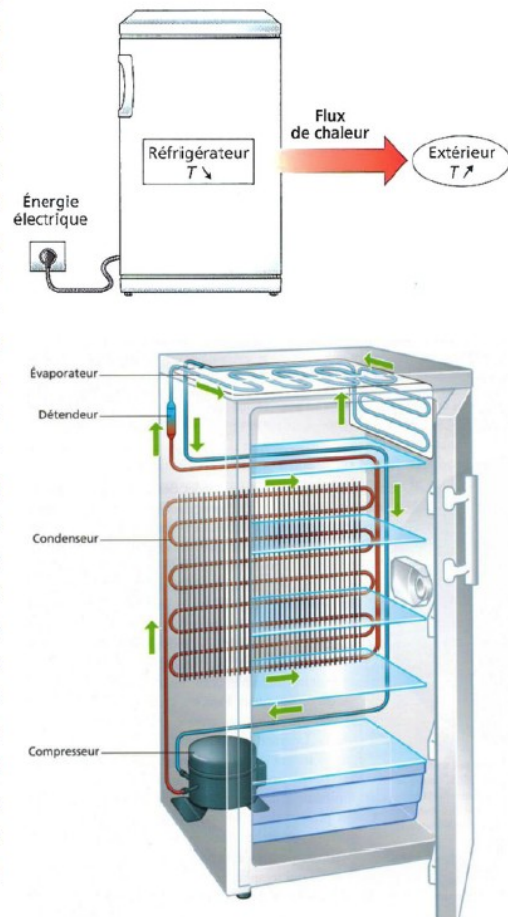
NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et
devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**Les résultats littéraux seront encadrés en rouge et les applications numériques soulignées en rouge si elles
sont demandées sans oublier les unités des grandeurs physiques.**

Exercice 1 : Quelques aspects thermodynamiques du réfrigérateur à compresseur

Dans cette partie, on souhaite analyser le principe de fonctionnement du réfrigérateur à compresseur en s'appuyant d'extraits du livre « *La physique par les objets quotidiens* » de C. Ray et J.C. Poizat.

Le principe du réfrigérateur est simple : il assure un transfert de chaleur depuis ses compartiments internes, qui se refroidissent, vers la pièce où il se trouve, qui se réchauffe. Ce transfert consomme de l'énergie électrique. [...]. Le compresseur comprime le fluide réfrigérant, alors froid et sous forme gazeuse, ce qui augmente sa température et sa pression. A la sortie du compresseur, le fluide est donc chaud et à haute pression. [...]. Ce gaz chaud et à haute pression circule ensuite à travers le condenseur, où il cède de la chaleur par diffusion vers l'extérieur et subit un changement d'état : le gaz se transforme en un liquide chaud sous haute pression. La condensation (plus exactement la liquéfaction) peut se produire à température élevée car la pression est importante. [...]. En poursuivant son chemin dans le circuit frigorifique, le liquide passe ensuite à travers un détendeur qui abaisse sa pression et sa température, ([...] la détente adiabatique s'effectue dans un fin capillaire). On obtient un mélange liquide-gaz à l'équilibre. Après cette chute de pression, le mélange liquide-gaz froid traverse l'évaporateur où il absorbe la chaleur de l'intérieur du réfrigérateur pour subir un second changement d'état : le liquide se met à bouillir, c'est-à-dire qu'il se vaporise. On obtient alors un gaz froid et à basse pression, qui repart dans le compresseur pour un nouveau cycle.



A) Principe de fonctionnement du réfrigérateur à compresseur

Le réfrigérateur est supposé être une machine cyclique et ditherme. Pour un cycle complet, on note Q_1 le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part du milieu extérieur, Q_2 le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part de l'intérieur du réfrigérateur et W le travail de compression permettant de faire fonctionner le réfrigérateur.

- 1) Identifier le nom des organes (compresseur, détendeur, condenseur ou évaporateur) dans lesquels les transferts d'énergie Q_1 , Q_2 et W s'opèrent.
- 2) Préciser si Q_1 , Q_2 et W sont positifs ou négatifs.
- 3) Le compresseur met en jeu une compression rapide que l'on peut supposer adiabatique. Proposer une explication de l'augmentation de la température du gaz supposé parfait à l'issue de cette compression.
- 4) Dessiner l'allure du diagramme $P(T)$ pour le seul équilibre liquide / gaz et préciser les phases dans chaque partie du diagramme et sur la courbe $P(T)$. A quelle condition une liquéfaction peut-elle s'observer à « température élevée » ?
- 5) Définir le coefficient de performance, noté CoP , du réfrigérateur puis l'exprimer en fonction de Q_1 et Q_2 .

On suppose le régime stationnaire atteint : la température T_{ext} de l'extérieur et la température de consigne T_{int} à l'intérieur du réfrigérateur sont constantes.

- 6) Déterminer l'expression du coefficient de performance maximal du réfrigérateur, noté CoP_c , en fonction de T_{int} et T_{ext} .
- 7) Calculer ce CoP_c si $T_{ext} = 25^\circ\text{C}$ et $T_{int} = 5^\circ\text{C}$.

B) Etude du cycle du fluide réfrigérant dans un diagramme entropique $T(s)$

Nous allons étudier plus précisément les différentes transformations que le fluide réfrigérant subit. L'écoulement du fluide réfrigérant est stationnaire, de débit massique D_m . Les variations d'énergies cinétique et potentielle du fluide seront négligées. Nous supposerons également que le fluide réfrigérant décrit le cycle suivant (on note $\{T_i, P_i\}$ le couple température-pression relatif à l'état i du fluide) :

- Avant d'entrer dans le compresseur, le fluide est un gaz surchauffé (état $A\{T_A, P_A\}$). Le compresseur impose une compression adiabatique et irréversible. Le fluide reste à l'état gazeux (état $B\{T_B, P_B\}$).
- Le fluide circule ensuite dans le condenseur où il opère un refroidissement isobare puis une liquéfaction complète isobare (et donc isotherme) à la pression P_B . On obtient un liquide saturant (état $C\{T_C, P_C\}$).
- Le liquide subit une détente isenthalpique (détente de type Joule-Thomson sans travail indiqué et sans transfert thermique) faisant apparaître un mélange diphasé après avoir traversé le détendeur (état $D\{T_D, P_D\}$).
- Le fluide pénètre dans l'évaporateur et évolue de manière isobare jusqu'à l'état A .

On prendra les valeurs suivantes : $P_A = 2$ bar, $P_B = 7$ bar, $T_A = 5$ °C, $T_B = 55$ °C et $D_m = 10^{-2}$ kg.s⁻¹. Une tolérance de ± 2 kJ.kg⁻¹ sur la lecture de l'enthalpie massique sera acceptée. Une tolérance de ± 1 °C sur la lecture des températures sera acceptée.

On rappelle, en tenant compte de nos hypothèses de travail, le premier principe de la thermodynamique appliqué à un fluide en écoulement dans une conduite, recevant une puissance thermique P_{th} et une puissance mécanique P_{meca} (mise en jeu par les éventuelles parties mobiles d'une machine présente dans la conduite) avec h_e et h_s les enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la conduite :

$$D_m(h_s - h_e) = P_{th} + P_{meca}$$

- 8) Repérer sur le diagramme entropique fourni en document-réponse les domaines liquide, diphasique et gazeux.
- 9) Reporter la position des points A, B, C et D sur le document-réponse fourni en annexe et à rendre avec la copie.
- 10) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température T_l de liquéfaction du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.
- 11) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température T_v de vaporisation du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.
- 12) Exprimer puis calculer la puissance $P_{th,2}$ reçue par le fluide pendant la transformation menant de l'état D à l'état A .
- 13) Exprimer puis calculer la puissance P_{meca} reçue par le fluide pendant la transformation menant de l'état A à l'état B .
- 14) Exprimer puis calculer la puissance $P_{th,1}$ reçue par le fluide pendant la transformation menant de l'état B à l'état C .
- 15) Les résultats précédents, aux incertitudes de lecture près, permettent d'écrire $P_{meca} \approx -(P_{th,1} + P_{th,2})$. Commenter cette relation.
- 16) En déduire l'expression puis une estimation de la valeur du coefficient de performance CoP_{vrai} (un seul chiffre significatif sera accepté pour la valeur de CoP_{vrai}).
- 17) Les résultats précédents impliquent que $CoP_{vrai} < CoP_c$. Interpréter ce résultat.
- 18) Lors d'un processus adiabatique, on peut déterminer, à l'aide du diagramme entropique, le travail massique w_f des forces de viscosité du fluide car $w_f = - \int_{Etat\ ini \xrightarrow{adia} Etat\ final} T ds$. Estimer la puissance P_f associée à ces forces de viscosité lors de la compression (pour ce calcul la représentation de la transformation menant de l'état A à B sera linéarisée et donc assimilée à un simple segment reliant les points A et B). Commenter ce dernier résultat.

Exercice 2 : Accéléromètre embarqué

On se propose dans un premier temps d'étudier le principe de fonctionnement des accéléromètres présents dans nos téléphones. Les avancées des nanotechnologies ont permis l'élaboration de ces accéléromètres à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems), ces derniers sont fixés sur les cartes électroniques de nos smartphones. Dans toute la suite :

- On note R_T le référentiel terrestre supposé galiléen, de centre O et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe dans ce référentiel. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre, on prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
- On note R le référentiel lié au téléphone. Dans un premier temps, R est astreint à un mouvement de translation selon la direction Ox .

On donne ci-dessous une schématisation simplifiée de l'accéléromètre étudié :

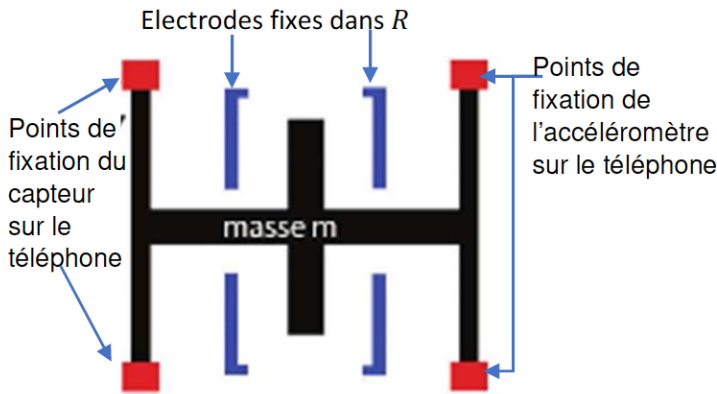


Figure 1 : Smartphone immobile dans R_T

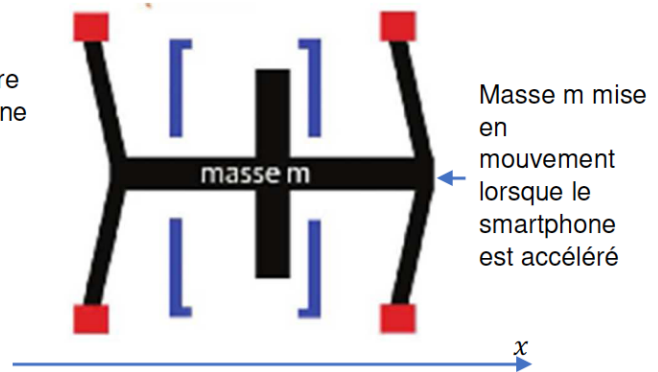
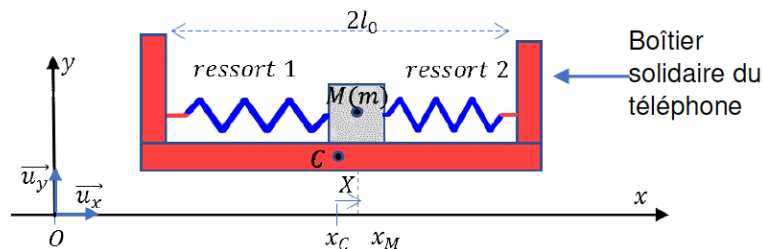


Figure 2 : Smartphone accéléré dans R_T

Source : « Smartphonique » d'Ulysse Delabre (Dunod)

Pour cette étude mécanique, nous ne prendrons pas en compte les électrodes du capteur, fixes dans R . Lorsque le téléphone est accéléré horizontalement selon Ox (figure 2), le bloc de masse m du capteur est mis en mouvement. Il s'en suit des oscillations de la masse m qui peuvent être décrites de manière analogue à un système mécanique de type {masse-ressorts}. Dans la suite, nous allons donc modéliser l'accéléromètre en l'assimilant à une masse m repérée par le point M et reliée à deux ressorts. Ces deux ressorts sont fixés à un boîtier de centre C qui est lui-même solidaire du téléphone :



Ce modèle suppose que les deux ressorts sont identiques, de raideur k , de longueur à vide l_0 . On note $\vec{f}_1$ la force qu'exerce le ressort 1 sur M et $\vec{f}_2$ la force qu'exerce le ressort 2 sur M . Le boîtier est de longueur $2l_0$. Le point C , repéré par l'abscisse $x_C(t)$ est animé d'un mouvement rectiligne et accéléré par rapport à R_T et son accélération sera notée $\vec{a}_C = a_C \vec{u}_x$. La masse m , dont la position est repérée par le point M d'abscisse $x_M(t)$ à l'instant t , est astreinte à un mouvement horizontal. Dans la suite, on pose $X = x_M - x_C$, ainsi $X = 0$ si l'accéléromètre est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre.

- 1) Exprimer $\vec{f}_1$ puis $\vec{f}_2$ en fonction de k et X .

Le mobile M subit donc une force $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = -2kX\vec{u}_x$ de la part des ressorts et subit également la réaction normale du support, son poids ainsi qu'une force de frottement donnée par $\vec{f}_3 = -\alpha(\dot{x}_M - \dot{x}_c)\vec{u}_x$ (où α est une constante).

- 2) En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour étudier le mouvement de M dans le référentiel terrestre, montrer que $X(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_c$$

Où ω_0 et Q sont deux constantes dont on précisera les expressions en fonction des données du sujet.

- 3) Donner l'unité de ω_0 et Q ainsi que la signification physique de ces deux grandeurs.

Dans la suite, nous allons chercher à déterminer les conditions pour lesquelles le déplacement X est proportionnel à l'accélération a_c que l'on cherche à mesurer. Pour cela, on va étudier la réponse du capteur en régime sinusoïdal forcé tel que $a_c = a_m \cos(\omega t)$ où ω est la pulsation à laquelle oscille le téléphone et $a_m > 0$ est une constante. Dans ces conditions, on écrit $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ où $X_m > 0$ et φ sont des constantes pour une valeur de ω donnée. En utilisant la notation complexe, on écrit $\underline{X} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\underline{a_c} = a_m e^{j(\omega t)}$.

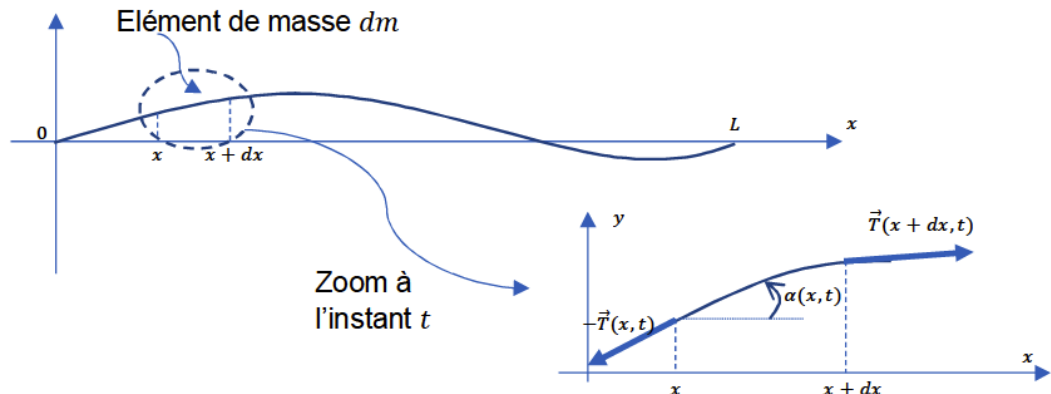
- 4) En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, montrer que : $X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2 \sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$

Dans la suite, on prendra $Q = 5$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5$ kHz.

- 5) Montrer qu'il est possible d'observer un phénomène de résonance en élongation à la fréquence $f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
- 6) Proposer une estimation de la valeur de f_r .
- 7) Expérimentalement, on stimule le capteur à des fréquences $f \ll f_r$, montrer alors que $X_m \approx K a_m$ où K est une constante qu'on exprimera en fonction des données du sujet.
- 8) Pour cette question, on impose une accélération a_c constante telle que $a_c = g$ et on fera l'approximation $\pi^2 \approx 10$. Estimer alors la valeur finale de X en nm .

Exercice 3 : Étude d'une corde vibrante

Dans un premier temps, on souhaite étudier le mouvement vertical d'une corde de masse linéique μ uniforme. Pour cette étude, on étudie un élément de masse dm de la corde, de longueur $d\ell$ et on impose les hypothèses suivantes :



- Hypothèse 1 : On néglige les frottements.
- Hypothèse 2 : La corde, supposée infiniment souple, est constamment tendue. Chaque élément de la corde est alors soumis à des forces de tension tangentes en tout point à la corde. On note $\vec{T}(x,t)$ la tension qu'exerce à un instant t la partie de la corde d'abscisse supérieure à x sur la partie de la corde d'abscisse inférieure à x .
- Hypothèse 3 : Le poids de chaque élément de la corde est négligeable par rapport aux tensions s'exerçant de part et d'autre de ce brin de corde.
- Hypothèse 4 : On néglige le déplacement horizontal (dans le référentiel d'étude supposé galiléen). Un point de la corde est repéré à l'équilibre par $(x,0)$ et est repéré hors équilibre par $(x,y(x,t))$.
- Hypothèse 5 : Le déplacement vertical $y(x,t)$ est faible. L'angle $\alpha(x,t)$ est supposé petit de sorte qu'il est légitime d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 par rapport à cet angle.

Il est demandé, pour les questions 19 et 20 une rédaction rigoureuse au cours de laquelle le candidat précise l'hypothèse (1, 2, 3, 4 ou 5) qu'il utilise à chaque étape importante de son raisonnement.

- 19) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe horizontal, montrer que la tension est uniforme le long de la corde.

Pour la suite, on notera T_0 la norme, uniforme et constante, de la tension $\vec{T}$ du fil.

- 20) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie de corde située entre x et $x + dx$, et en le projetant sur l'axe vertical, montrer que $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$. On donnera l'expression de v en fonction de T_0 et μ .

- 21) Que représente la grandeur v ?

Pour les questions 22 et 23, les deux extrémités de la corde (situées en $x = 0$ et $x = L$) sont fixes. Afin de résoudre l'équation aux dérivées partielles précédente, on propose une solution particulière $y(x,t)$ à variables séparées de la forme $y(x,t) = A \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$ où A est une constante avec $v = \frac{\omega}{k}$ et où ω et k sont deux grandeurs réelles et positives appelées respectivement pulsation temporelle et pulsation spatiale de l'onde.

- 22) Comment qualifier l'onde décrite par l'expression de $y(x,t)$?

- 23) Montrer que les conditions aux limites imposent une quantification des pulsations ω_n des ondes recherchées avec $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$ où n désigne un entier naturel non nul fixant le rang du mode propre.

Pour les questions 24 et 25, l'extrémité d'abscisse $x = L$ de la corde est fixe et un système excitateur impose à son extrémité d'abscisse $x = 0$ un petit déplacement transversal $y(0, t) = a \cos(\Omega t)$ (avec a constante fixant l'amplitude verticale et Ω fixant la pulsation d'excitation).



Pour décrire le régime forcé, nous cherchons une vibration $y(x, t)$ de pulsation temporelle Ω et satisfaisant les conditions limites.

Pour ce régime forcé établi, on montre que la solution s'écrit :

$$y(x, t) = a \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{v}(L - x)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{v}L\right)} \cos(\Omega t)$$

- 24) Pour quelles pulsations d'excitation Ω obtient-on des ventres d'amplitude maximale (ici d'amplitude infinie par absence de modélisation des frottements) ?
- 25) On remarquera une similitude entre les pulsations pour lesquelles il y a résonance en régime sinusoïdal forcé et les pulsations des modes propres. Citer un autre système physique pour lequel on rencontre le même phénomène.

