

## Équations de Maxwell

- Maxwell – Gauss  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  (MG) ;
- Maxwell – Faraday  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (MF) ;
- Maxwell – flux  $\text{div } \vec{B} = 0$  (MΦ) ;
- Maxwell – Ampère  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (MA) ;

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide, s'exprime en  $F.m^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$  la perméabilité du vide ; elles sont liées par  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

L'ensemble des équations de Maxwell sont linéaires ! On pourra alors utiliser les propriétés importantes qui en découlent pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :

- le principe de superposition ;
- la notation complexe en régime sinusoïdale forcé ;
- les séries de Fourier.

L'équation de conservation de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$  où  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  est présente dans les équations de Maxwell

## Mathématiques

Théorème de Green – Ostrogradski :  $\iiint (\text{div } \vec{F}) . dV = \oiint \vec{F} . d\vec{S}$  où  $\vec{F}$  est un champ vectoriel

Théorème de Stokes :  $\iint (\text{rot } \vec{F}) . d\vec{S} = \oint \vec{F} . d\vec{l}$  où  $\vec{F}$  est un champ vectoriel

$\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$  où  $f$  est un champ scalaire

$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$  où  $\vec{F}$  est un champ vectoriel

Le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel :  $\Delta \vec{F} = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{F})$

Pour Poynting :  $\text{div}(\vec{F} \wedge \vec{K}) = \vec{K} . \text{rot}(\vec{F}) - \vec{F} . \text{rot}(\vec{K})$  où  $\vec{F}$  et  $\vec{K}$  sont des champs vectoriels

## Électrostatique

Théorème de Gauss :  $\oiint \vec{E} . d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$  (provient de MG et donc vrai même en régime variable)

Le champ électrostatique dérive du potentiel électrostatique :  $\vec{E} = -\text{grad } V$  (provient de MF statique). Il en découle les propriétés suivantes :

- $\int_{M_1 \rightarrow M_2} \vec{E} . d\vec{l} = V(M_1) - V(M_2) = U_{M_1, M_2}$  ;
- Les lignes de champ  $\vec{E}$  sont orthogonales aux surfaces équipotentielles ;
- Le champ  $\vec{E}$  est dirigé vers les potentiels décroissants ;
- Aucune ligne de champ  $\vec{E}$  n'est fermée : elle part d'une distribution de charge pour se terminer sur une autre (ou en un point où  $\vec{E}$  s'annule) ;
- L'énergie potentielle électrique associée à une charge  $q$ , située en  $M$ , plongée dans un champ électrostatique extérieur, est  $E_p = qV(M)$ .

Les principes de Curie et de superposition s'appliquent à  $\vec{E}$

Discontinuité à l'interface d'une surface chargée :  $\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}(M)$ .

## Magnétostatique

**Théorème d'Ampère :**  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{align}}$  (provient de MA statique)

**Le champ magnétique est à flux conservatif :**  $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  (provient de  $M\Phi$  donc vrai même en régime variable). Il en découle les propriétés suivantes :

- Les lignes de champ  $\vec{B}$  se resserrent quand  $\|\vec{B}\|$  augmente ;
- Les monopôles magnétiques n'existent pas.

**Le principe de Curie s'applique à  $\vec{B}$  mais attention,  $\vec{B}$  est défini comme un pseudo-vecteur : les plans de symétrie pour la distribution de courant sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{B}$  et inversement.**

**Le principe de superposition s'applique à  $\vec{B}$**

**Discontinuité à l'interface d'une surface parcourue par  $\vec{j}_s$  :**  $\vec{B}_2(M) - \vec{B}_1(M) = \mu_0 \vec{j}_s(M) \wedge \vec{u}_{1 \rightarrow 2}(M)$ .

## Induction

**Loi de Faraday :**  $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  (provient de MF)

**Loi de Lenz :** les phénomènes d'induction s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance

**Auto-induction :**  $\Phi_{\text{propre}} = Li$  où  $L > 0$  est l'inductance propre du circuit

**Induction mutuelle entre deux circuits :**

$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  ;  $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$  où  $M$  est l'inductance mutuelle (s'exprime en Henry et peut être positive ou négative en fonction de l'orientation des 2 circuits).

- Propriété :  $M^2 \leq L_1 L_2$  ; si  $M^2 = L_1 L_2$  alors on parle de couplage parfait.
- Définition : l'énergie magnétique d'un système constitué de 2 circuits couplés par inductance mutuelle est  $\mathcal{E}_{\text{magn}}(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$ .

**Couplage électromécanique :**  $P_{\text{ind}}(t) + P_{L_a}(t) = 0$  où

- $P_{\text{ind}}(t) = e_{\text{ind}}(t) i(t)$  est la puissance électrocinétique fournie par la fem induite ;
- $P_{L_a}(t)$  est la puissance mécanique fournie par la force de Laplace ( $P_{L_a} = \vec{F}_{L_a} \cdot \vec{v}$  pour une translation et  $P_{L_a} = M_{F_{L_a}} \cdot \omega$  pour une rotation autour d'un axe fixe)

## Propagation

**Équations de propagation :**  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$  et  $\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$  avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

**Densité volumique d'énergie électromagnétique :**  $w_{EM}(M, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2(M, t) + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2(M, t)}{\mu_0}$  (en  $J.m^{-3}$ )

**Vecteur de Poynting :**  $\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0}$  (en  $W.m^{-2}$ ) ; interprétation physique :

- sa direction et son sens représentent la direction et le sens de propagation de l'énergie électromagnétique ;
- son flux à travers une surface orientée  $S$  représente la puissance électromagnétique traversant  $S$ , appelée puissance rayonnée :  $P(t) = \iint_{M \in S} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$

**Équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique, ou équation de Poynting :**

$$\frac{\partial w_{EM}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0$$

**Forme du champ électrique pour une OPPHPR (onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement) pour une polarisation suivant  $\vec{u}_y$  et un sens de propagation suivant  $\pm \vec{u}_x$  :**

$$\vec{E}(x, t) = E \cos(\omega t \mp kx + \varphi) \vec{u}_y$$

### Structure d'une OPPH :

- Relation de dispersion :  $\omega = k c$  ;
- $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$  donc  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$  et le trièdre  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  est direct ;
- Les champs électriques et magnétiques sont transverses :  $\vec{E} \perp \vec{k}$  et  $\vec{B} \perp \vec{k}$  ;
- Les champs électrique et magnétique sont en phase.

### Conduction électrique dans un conducteur

Loi d'Ohm locale :  $\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$  où  $\gamma$  (en  $S.m^{-1}$ ) est la conductivité électrique du conducteur

La puissance volumique reçue par les porteurs de charge de la part du champ électromagnétique est  $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} (= \gamma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} > 0)$  ; il s'agit de l'effet Joule

Loi d'Ohm globale en régime stationnaire pour un conducteur unidimensionnel :  $R_{elec}(1D) = \frac{L}{\gamma S}$  où  $L$  est la longueur du conducteur et  $S$  sa section

## Électrostatique

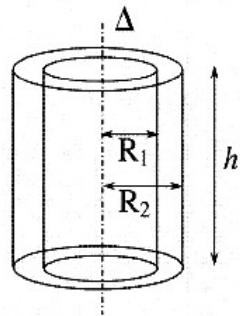
### Exercice 1 : Distribution à symétrie sphérique

1. On considère une sphère creuse de centre  $O$  et de rayon  $R$  dont la surface est chargée avec une densité surfacique de charge  $\sigma > 0$  uniforme. Calculer le champ électrostatique en tout point  $M$ .
2. On considère une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  de densité volumique de charge  $\rho > 0$  uniforme. Calculer le champ électrostatique et en déduire le potentiel électrostatique  $V$  en tout point  $M$ .

### Exercice 2 : Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique, placé dans de l'air sec ( $\epsilon_r = 1$ ), est constitué de deux armatures métalliques coaxiales, de rayons  $R_1$  et  $R_2$  (avec  $R_1 < R_2$ ). La hauteur des armatures en regard vaut  $h$ . On néglige les effets de bords. Dans ce cas, le champ électrostatique est radial, comme si le cylindre était infiniment long. Soit  $Q$  la charge de l'armature interne et  $-Q$  celle de l'armature externe (avec  $Q > 0$ ).

1. Trouver l'expression du champ électrostatique à la distance  $r$  de l'axe ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) en fonction de  $r$ ,  $h$ ,  $\epsilon_0$  et de la charge totale  $Q$  portée par l'armature interne.
2. En déduire l'expression de la capacité  $C$  du condensateur. On appelle alors  $\frac{C}{h}$  la capacité linéique du condensateur cylindrique, son expression est à savoir établir.
3. On pose  $R_2 - R_1 = e$ . Que devient l'expression de la capacité  $C$  si  $e \ll R_1$  ?



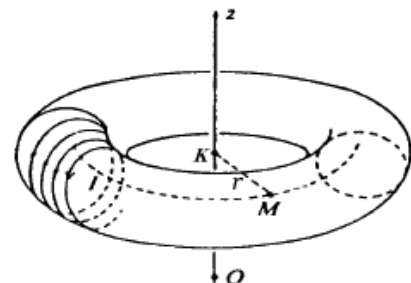
## Magnétostatique

### Exercice 3 : Fil infini

On considère un fil infini rectiligne parcouru par une intensité  $I$  constante. Calculer le champ magnétostatique en tout point  $M$ .

### Exercice 4 : Tore

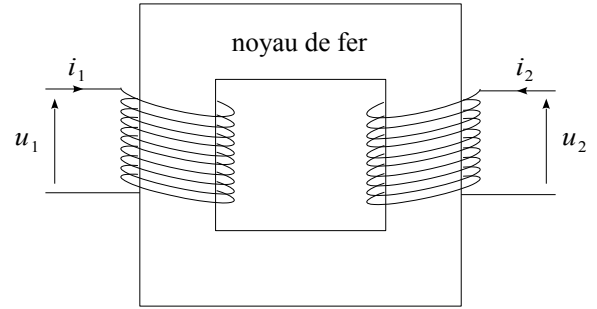
On considère une bobine torique constituée de  $N$  spires jointives régulièrement enroulées sur un tore d'axe de révolution  $(Oz)$ . Elle est traversée par une intensité constante  $I$ . Déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace  $M$ .



# Induction

## Exercice 5 : Le transformateur

Un transformateur est constitué de deux circuits (dont on néglige les résistances internes) dont l'un, appelé le circuit « primaire », contient une bobine de  $N_1$  spires et l'autre, appelé le circuit « secondaire », contient une bobine de  $N_2$  spires. Le primaire est alimenté par une tension sinusoïdale  $u_1(t)$ .

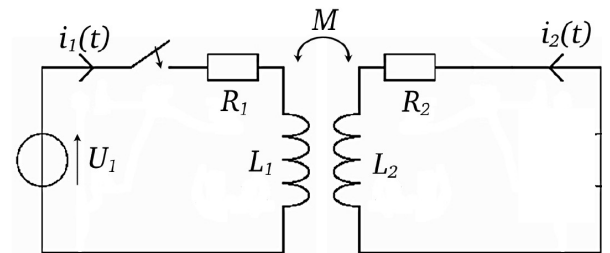


On note  $u_2(t)$  la tension aux bornes du secondaire. Les deux bobines sont traversées par un métal qui canalise les lignes de champs magnétiques permettant ainsi d'obtenir un couplage parfait : toutes les lignes de champ traversant le primaire traversent aussi le secondaire. Les intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  sont telles que tous les flux sont comptés positivement (cf figure).

1. Exprimer le flux magnétique traversant le circuit primaire en fonction de  $N_1$ , de  $B$  (champ magnétique global traversant le noyau de fer) et de  $S_1$  (surface d'une spire de la bobine du primaire).  
Exprimer le flux magnétique traversant le circuit secondaire en fonction de  $N_2$ , de  $B$  et de  $S_2$  (surface d'une spire de la bobine du secondaire).
2. En déduire l'expression de  $u_2$  en fonction de  $u_1$  en supposant que  $S_1 = S_2$ .
3. Comment choisir le nombre de spires pour avoir un transformateur 230 V/12 V ?

## Exercice 6 : Couplage par mutuelle – Bilan de puissance

Considérons le schéma électrique ci-contre, représentant deux circuits électriques couplés.



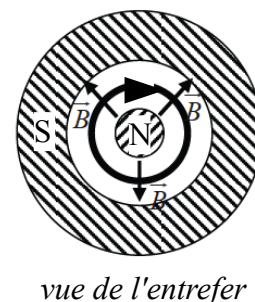
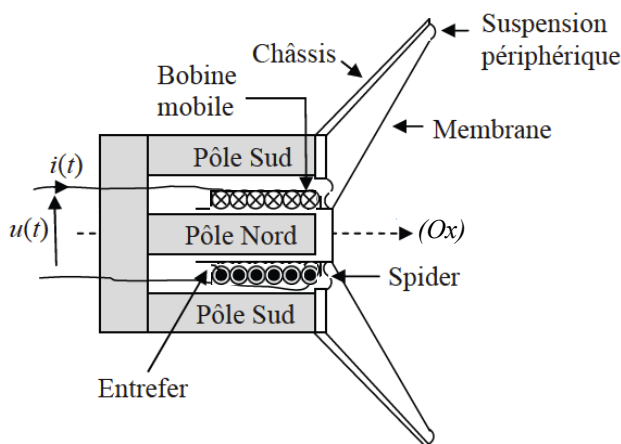
1. Exprimer les forces électromotrices induites apparaissant au niveau des bobines.
2. En déduire les lois des mailles des deux circuits couplés.
3. Réaliser un bilan de puissance.  
En déduire l'énergie magnétique stockée dans l'ensemble des deux circuits.

## Exercice 7 : Principe du haut-parleur

Un haut-parleur est constitué :

- d'un aimant permanent qui crée un champ magnétique radial et stationnaire dans l'entrefer en forme d'anneau ;
- d'une bobine de longueur totale de fil  $l$ , de résistance interne  $R$ , d'inductance propre  $L$  située dans l'entrefer de l'aimant et soumise à une tension  $u(t)$  d'un amplificateur ;
- d'une membrane solidaire de la bobine qui crée le son et qui est donc soumise à une force de frottement fluide  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ .

L'ensemble mobile (bobine + membrane) a une masse  $m$  et peut osciller autour de la position  $x=0$  grâce à un dispositif de rappel (le spider) schématisé par un ressort de raideur  $k$  et une force de rappel  $\vec{F}_r = -k x(t) \vec{u}_x$ .



1. La bobine est parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$ . Calculer la force de Laplace qu'elle subit et écrire l'équation mécanique du haut-parleur. Quelle est la puissance de la force de Laplace ?
2. En déduire l'expression de la puissance de la fem induite ainsi que l'expression de la fem induite  $e_{ind}$ . Écrire alors l'équation électrique du haut-parleur.
3. Établir un bilan global de puissance et donner la signification de chaque terme. Que devient ce bilan en valeur moyenne pour un régime périodique ? Commenter.
4. Déduire de la question précédente une définition du rendement  $\eta$  du haut-parleur.
5. La tension  $u(t)$  est sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . On se place en régime sinusoïdal forcé. Montrer que l'on peut écrire  $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$  avec  $\underline{Z} = \underline{Z}_{elec} + \frac{1}{\underline{Y}_m}$  à exprimer.  $\underline{Z}_m = \frac{1}{\underline{Y}_m}$  est « l'impédance motionnelle » du haut-parleur (i.e qui est « relative au mouvement »), elle représente le comportement électrique de l'oscillateur mécanique dont est composé le haut-parleur (par le phénomène d'induction). En déduire le schéma électrique équivalent du haut-parleur. Calculer les valeurs des composants de l'impédance motionnelle avec :  $B = 0,20 T$ ,  $l = 20 m$ ,  $m = 120 g$ ,  $k = 43.10^3 N.m^{-1}$  et  $\alpha = 6,0 kg.s^{-1}$ .

### Exercice 8 : Freinage par induction (CCP TSI 2013)

Un cadre carré de côté  $a$ , de masse  $m$ , de résistance totale  $R$  et d'inductance négligeable est astreint à se déplacer dans une zone de l'espace telle que :

- dans la zone définie par  $z > 0$  règne un champ magnétique uniforme et orthogonal au cadre  $\vec{B} = B\vec{u}_x$  ;
- dans la zone définie par  $z < 0$ , il n'existe pas de champ magnétique.

La position du cadre est repérée par l'abscisse  $z$  du côté horizontal supérieur du cadre.

Un dispositif non représenté astreint le cadre à se déplacer uniquement verticalement.

Le déplacement du cadre au cours du temps est tel qu'à tout instant, le côté horizontal inférieur se trouve dans la zone où il n'existe pas de champ magnétique et le côté horizontal supérieur se trouve dans la zone où règne le champ magnétique  $\vec{B}$ .

L'orientation arbitraire du cadre est indiquée sur la figure 5.

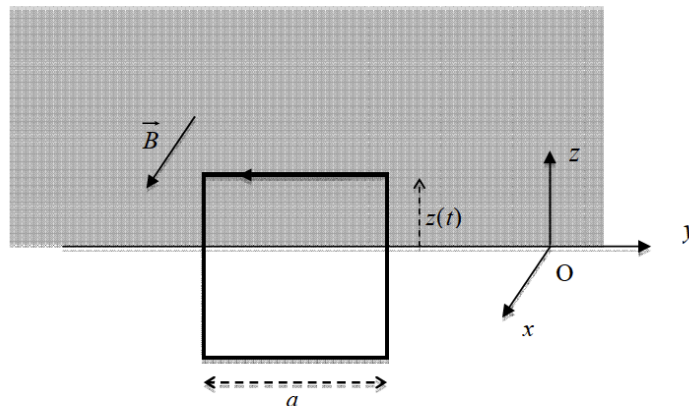


Figure 5 : spire dans le champ magnétique

Dans cette partie, on négligera tous les frottements mécaniques.

19 – On souhaite déterminer l'intensité du courant induit qui va traverser le cadre.

19.1 – Déterminer le flux  $\Phi(t)$  du champ magnétique à travers le cadre lorsque il est repéré par une position  $z(t)$ .

19.2 – Déterminer l'expression de la force électromotrice induite  $e(t)$  qui apparaît dans le cadre en fonction de  $a$ ,  $z$  et  $B$ .

19.3 – En déduire l'expression de l'intensité du courant  $i(t)$  qui apparaît dans le cadre en fonction de  $z$ ,  $a$ ,  $R$  et  $B$ .

20 – Déterminer l'expression de la résultante de la force de Laplace qui s'applique sur le cadre en fonction de  $z$ ,  $a$ ,  $R$ ,  $B$  et d'un ou plusieurs vecteurs unitaires que l'on précisera.

21 – Justifier le fait que le cadre ainsi constitué pourrait servir de système d'amortissement pour une suspension de véhicule. Citer certains avantages que présenterait un tel système d'amortissement par rapport aux systèmes classiques.

**22** – Déterminer l'expression du champ  $B$  à appliquer pour que le cadre puisse servir d'amortisseur de coefficient de frottement  $h$ . On exprimera  $B$  en fonction de  $h$ ,  $R$  et  $a$ .

**23** – Pour un amortisseur de véhicule, le coefficient de frottement doit être de l'ordre de  $h = 10^4$  S.I. On se place dans le cas d'un cadre de côté  $a = 10$  cm et de résistance  $R = 10^{-4} \Omega$ .

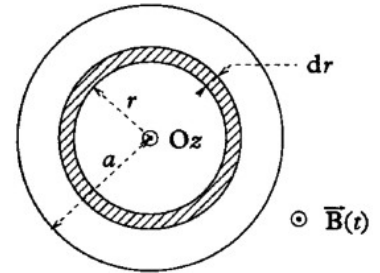
Déterminer numériquement l'ordre de grandeur du champ  $B$  qu'il faudrait appliquer au cadre pour produire un tel coefficient de frottement.

Quel est l'ordre de grandeur de l'intensité du champ magnétique que peut créer un aimant permanent ?

Pourrait-on créer un champ magnétique d'une telle intensité avec un électroaimant ?

### Exercice 9 : Plaque à induction (*présence de conduction électrique*)

On cherche dans cet exercice à déterminer la puissance thermique reçue par le fond d'une casserole posée sur une plaque à induction. On assimile le fond de la casserole à un cylindre de rayon  $a$ , d'épaisseur  $h$  et d'axe  $(Oz)$ . La plaque à induction crée en son sein un champ magnétique variable  $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . Pour étudier les courants induits dans le fond de la casserole (courants de Foucault), on modélise ce dernier par un ensemble de spires circulaires concentriques d'axe  $(Oz)$ , d'épaisseur  $h$  et de largeur  $dr$ .



On admettra que la conductance électrique  $dG$  (inverse de la résistance électrique) d'une de ces spires, de rayon  $r$ , s'écrit  $dG = \gamma h dr$  où  $\gamma$  est la conductivité électrique du métal utilisé.

1. Exprimer la force électromotrice induite  $de_{ind}$  dans une spire de rayon  $r$ .
2. En déduire le courant induit  $di$  dans une spire, assimilée à un circuit filiforme de conductance  $dG$ .
3. En déduire la puissance moyenne  $dP$  dissipée par effet Joule dans une spire.
4. Déterminer alors la puissance moyenne totale  $P$  dissipée dans le fond de la casserole en fonction  $B_0$ ,  $\omega$ ,  $h$ ,  $\gamma$  et  $a$ .
5. Calculer  $P$  avec  $\gamma = 10^7 S.m^{-1}$ ,  $h = 5$  mm,  $a = 10$  cm,  $B_0 = 0,1$  T et  $\omega = 100\pi$  rad.s $^{-1}$ .
6. Comment peut-on procéder, en pratique, pour faire varier la puissance reçue par la casserole ?

### Exercice 10 : Inductance propre d'un câble coaxial (CCP MP 2015)

Dans un repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , un câble coaxial, considéré comme infiniment long et placé dans un milieu de perméabilité magnétique  $\mu_0$ , est formé de deux armatures cylindriques de même axe  $z'z$  (figure 1). L'armature intérieure (l'âme) est un cylindre creux de rayon  $a$ ; l'armature extérieure (la gaine) est un cylindre creux de rayon  $b$ . Le courant continu d'intensité  $I$  qui circule dans l'âme dans le sens de  $\vec{e}_z$  revient avec la même intensité dans la gaine selon  $-\vec{e}_z$ ; ce câble constitue ainsi un circuit fermé.

A un point  $M$  de l'espace, on associera les coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$  et la base orthonormée directe cylindrique  $\mathcal{B}_{cyl} = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ .

**I.1.a)** Exploiter les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer l'orientation du champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  créé par ce câble ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point  $M$  quelconque de l'espace.

**I.1.b)** Donner la valeur de  $\vec{B}(M)$  pour un point  $M$  intérieur à l'âme ( $\rho < a$ ) ou extérieur à la gaine ( $b < \rho$ ). Justifier.

**I.1.c)** Dans la base  $\mathcal{B}_{cyl}$ , exprimer le champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  créé par ce câble en tout point  $M$  situé à la distance  $\rho$  ( $a < \rho < b$ ) de son axe.

**I.2.a)** Calculer le flux de  $\vec{B}(M)$  à travers la surface rectangulaire  $(PQRS)$  correspondant à une longueur  $l$  du câble, représentée sur la figure 1 et orientée dans le sens de  $+\vec{e}_\phi$ .

**I.2.b)** Rappeler l'expression générale qui lie le flux de  $\vec{B}(M)$  à l'inductance propre (ou coefficient d'auto-inductance) et en déduire l'inductance  $L$  d'une longueur  $l$  du câble en fonction de  $\mu_0$ ,  $l$ ,  $a$  et  $b$ .

**I.2.c)** Application numérique pour un câble standard : calculer  $L$  si :  $l = 1$  m,  $a = 1$  mm,  $b = 3$  mm.

**I.2.d)** Application numérique pour un dispositif à compression de flux qui sera développé en troisième et quatrième parties de ce problème : calculer  $L$  si :  $l = 66$  mm,  $a = 1,0$  mm,  $b = 40$  mm.

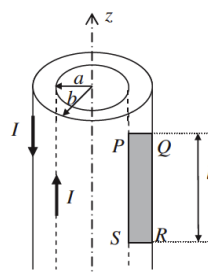


Figure 1 - Représentation schématique d'un câble coaxial. Surface rectangulaire  $(PQRS)$  comprise entre l'âme et la gaine.

# Propagation

## Exercice 11 : Onde électromagnétique

On considère le champ électrique suivant, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

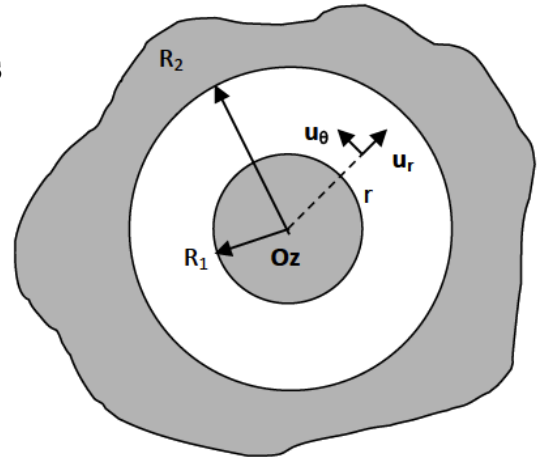
$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y.$$

1. Comment peut-on caractériser cette onde ?
2. Quelle équation régit l'évolution spatio-temporelle du champ électrique ?
3. La démontrer par les équations de Maxwell.
4. Vérifier que l'expression du champ électrique fournie est solution de cette équation à condition que  $\omega$  et  $k$  soient liées par une expression qu'on explicitera.
5. Déterminer le champ magnétique associé.
6. Calculer le vecteur de Poynting. Que représente-il ?

## Exercice 12 : Onde électromagnétique entre deux cylindres

On considère une onde électromagnétique se propageant dans l'espace vide compris entre deux conducteurs cylindriques de rayons  $R_1$  et  $R_2$  et de grande dimension selon  $(Oz)$ .

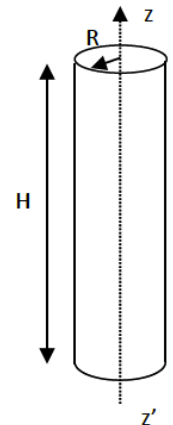
On suppose que le champ électrique prend la forme  $\forall R_1 \leq r \leq R_2, \vec{E}(r, t) = E(r) \cos(kz - \omega t) \vec{u}_r$ , avec  $E(r=R_1) = E_1$  et  $k > 0$ .



1. Déterminer  $E(r)$ .
2. Calculer la puissance moyenne transportée par cette onde électromagnétique.

## Exercice 13 : Conservation de l'énergie électromagnétique (présence de conduction électrique)

On considère un cylindre métallique neutre de conductivité électrique  $\gamma$ . Ce cylindre est de rayon  $R$  et de longueur  $H$  supposée très grande devant  $R$ . On utilise le système de coordonnées cylindriques.



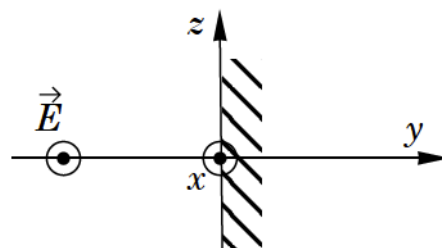
1. On place ce cylindre dans un champ électrique constant  $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_z$ .
2. Déterminer l'expression de la densité de courant  $\vec{j}$  à l'intérieur du cylindre.
3. En déduire l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  créé à l'intérieur du cylindre par cette distribution de courant  $\vec{j}$ .
4. Déterminer la puissance  $P_J$  dissipée par effet Joule dans tout le cylindre.
5. Exprimer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface latérale du cylindre. Commenter.

## Exercice 14 : Onde électromagnétique dans un conducteur (présence de conduction électrique)

On considère une onde électromagnétique ( $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - ky)} \vec{u}_x$  pour  $y < 0$ ), de fréquence  $f = 2,5 \text{ GHz}$ , plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, incidente sur un métal qui remplit le milieu semi-infini  $y \geq 0$ . Le métal, considéré non parfait, est du cuivre, de conductivité électrique  $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ .

On rappelle que dans un bon conducteur électrique, la densité volumique de charge est nulle.

On cherche un champ électrique, en notation complexe, qui prend la forme  $\vec{E} = \underline{E}(y) e^{i(\omega t)} \vec{u}_x$  pour  $y \geq 0$ .



- Vérifier que cette expression de  $\vec{E}$  est cohérente avec l'expression de Maxwell-Gauss pour  $y \geq 0$ .
- Exprimer, dans le cuivre, le rapport des ordres de grandeur de  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et de  $\vec{j}$ . Commenter.
- En tenant compte de cette approximation, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}$  dans le cuivre (on pourra commencer par calculer le  $\vec{\Delta} \vec{E}$ ). Comment s'appelle cette équation ?
- En déduire l'équation vérifiée par  $\underline{E}(y)$ . On pose  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ , appelée épaisseur de peau.
- On cherche une solution sous la forme  $\underline{E}(y) = E_0 e^{\underline{\epsilon} y}$ . Montrer que  $\underline{\epsilon}$  prend la forme  $\underline{\epsilon} = \pm \frac{1+i}{\delta}$ . Montrer qu'une des deux solutions n'est pas physique car elle diverge quand  $y \rightarrow \infty$ .
- Exprimer alors  $\vec{E}$  pour  $y \geq 0$  et déterminer l'ordre de grandeur de  $\delta$ . Que se passe-t-il ?

## Retour sur l'induction

### Exercice 15 : Principe du moteur asynchrone (ATS 2006)

Un moteur asynchrone est constitué d'un stator et d'un rotor.  
Le stator est réalisé à l'aide d'un ensemble de bobines fixes destinées à engendrer dans une zone limitée de l'espace un champ magnétique tournant  $B(t)$ .  
Le rotor est modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface  $S$ , contenant  $N$  spires mobile autour d'un axe.

#### 1. Stator de la machine asynchrone : production d'un champ tournant

Soit un ensemble de trois bobines, dont les axes sont régulièrement décalés de  $\frac{2\pi}{3}$  dans le plan  $xOy$ , et alimentées par un système triphasé de courants de pulsation  $\omega_s$  dont les intensités sont les suivantes:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_M \cos(\omega_s t) \\ i_2(t) &= I_M \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) &= I_M \cos\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

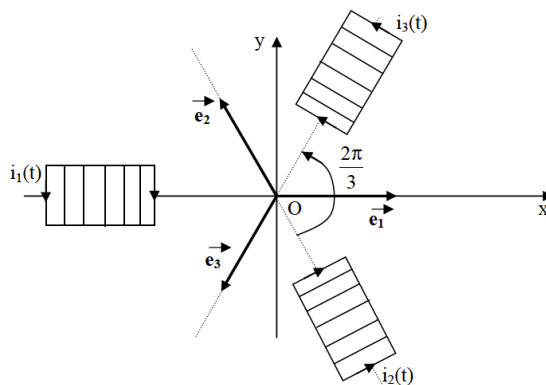


Figure 1

La fréquence d'alimentation de ces bobinages statoriques est égale à 50Hz.



Chaque bobine crée au centre O un champ magnétique qui peut se mettre sous la forme :  $\vec{B}_j = K.i_j(t).\vec{e}_j$  ( K est une constante et  $\vec{e}_j$  est le vecteur unitaire de l'axe de la jème bobine).

1.1. Déterminer les composantes sur Ox et Oy du champ magnétique total  $\vec{B}$  en O.

On notera  $B = \|\vec{B}\|$  sa norme que l'on exprimera en fonction de K et  $I_M$ .

1.2. Justifier l'appellation de champ tournant pour ce champ magnétique total  $\vec{B}$ .

Préciser à quelle vitesse angulaire ce champ tourne dans le plan xOy.

Calculer la valeur numérique de la vitesse de rotation du champ tournant  $n_s$  en tours par minute (tr/mn).

## 2. Entraînement du rotor de la machine asynchrone

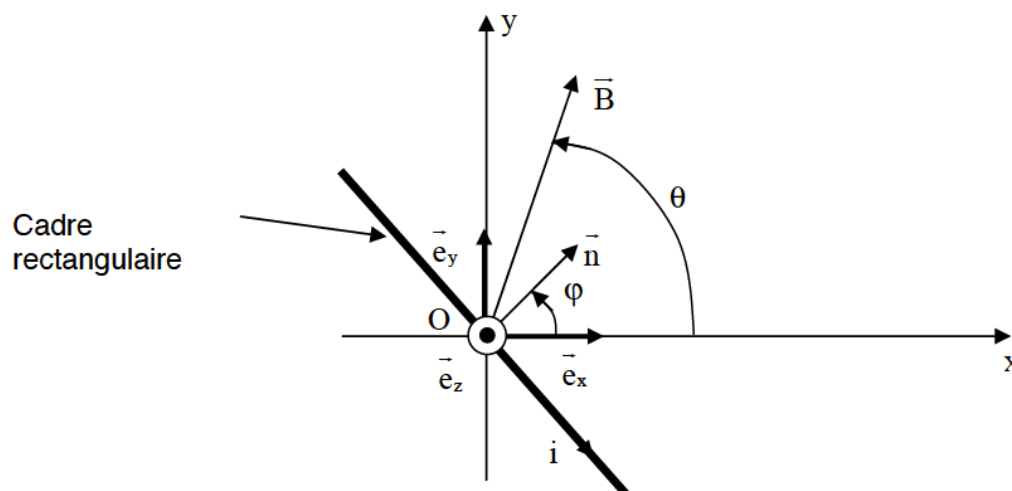
Le rotor est modélisé par un cadre conducteur rectangulaire de surface S, orienté suivant la normale  $\vec{n}$ , contenant N spires planes filiformes et indéformables en série, et susceptible de tourner autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante.

Le cadre est placé dans le **champ magnétique tournant que l'on suppose uniforme**, de norme notée B.

Les positions angulaires de  $\vec{B}$  et  $\vec{n}$  sont repérées par les angles suivants :

$$\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{B}) = \omega_s t \quad \text{et} \quad \varphi(t) = (\vec{e}_x, \vec{n}) = \omega t$$

Dans toute la suite, on suppose que :  $0 \leq \omega \leq \omega_s$  .



Vue de dessus

Figure 2

2.1. Déterminer le flux  $\Phi$  du champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le stator à travers les N spires du cadre, en fonction de B, N, S,  $\omega$ ,  $\omega_s$  et t.

2.2. En déduire la force électromotrice d'induction  $e(t)$  qui apparaît dans celui-ci en fonction du flux maximum à travers le circuit  $\Phi_M = N S B$ , et de la vitesse angulaire de glissement  $\omega_r = \omega_s - \omega$  ( $\omega_r$  est positive ou nulle).

2.3. Le cadre est équivalent à un circuit série de résistance R et d'inductance propre L.

a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i(t)$  dans la bobine.

b) En déduire l'expression de  $i(t)$  en régime permanent sinusoïdal que l'on mettra sous la forme suivante :

$$i(t) = I_M \sin(\omega_r t - \psi)$$

Exprimer, en fonction de  $\Phi_M$ , R, L et  $\omega_r$ , l'amplitude  $I_M$  de  $i(t)$  et le retard de phase  $\Psi$  de  $i(t)$  par rapport à la force électromotrice  $e(t)$  déterminée à la question 2.2.

### 3. Couple électromagnétique

Le cadre rectangulaire est parcouru par le courant  $i(t)$ .

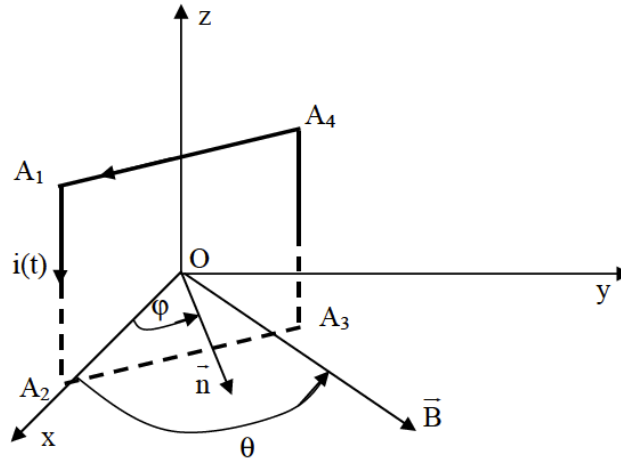


Figure 3

On note  $\Gamma(t) = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z$  le moment par rapport à l'axe Oz du couple électromagnétique des forces de Laplace s'exerçant sur les N spires du cadre.

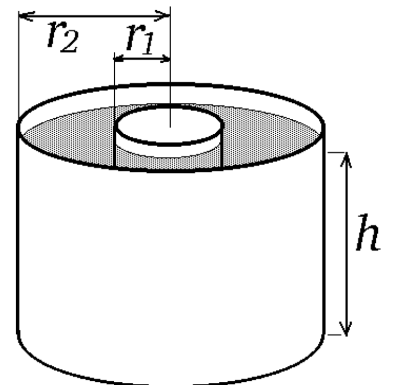
3.1. Etablir l'expression de  $\Gamma(t)$ .

3.2. Montrer que sa valeur moyenne  $\langle \Gamma(t) \rangle$  notée  $\Gamma_{em}$  est donnée par l'expression suivante :

$$\Gamma_{em} = \left( \frac{\Phi_M^2}{2L} \right) \frac{RL\omega_r}{R^2 + (L\omega_r)^2}$$

### Exercice 16 : Résistance cylindrique (conduction électrique)

Deux électrodes cylindriques coaxiales de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$  plongent sur une hauteur  $h$  dans une solution électrolytique de conductivité électrique  $\gamma$  uniforme. On suppose que le potentiel de chacune des plaques est uniforme et constant (le régime stationnaire est atteint). On néglige les effets de bords : on admet que  $\vec{j}(M) = j(r)\vec{u}_r$ . On suppose  $V(r_1) > V(r_2)$  donc  $j(r) > 0$ .



1. Donner l'expression de l'intensité  $I$  qui traverse la solution électrolytique en fonction de  $j(r)$ ,  $r$  et  $h$ .
2. Exprimer le champ électrique  $\vec{E}$  au sein de la solution électrolytique en fonction de  $I$ ,  $r$ ,  $h$ ,  $\gamma$  et  $\vec{u}_r$ .
3. En déduire la valeur de la résistance électrique  $R_{sol}$  de la solution électrolytique en fonction de  $\gamma$ ,  $h$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .
4. On pose  $e = r_2 - r_1$ . Que devient l'expression de  $R_{sol}$  dans le cas où  $e \ll r_1$  ? Commenter.