EM1-c : Le potentiel électrostatique

I. Définition du potentiel électrostatique V

1. Équation de Maxwell-Faraday

$\overrightarrow{rot}(\vec{E})=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc **en statique**, $\overrightarrow{rot}(\vec{E})=\vec{0}$.

L'analyse vectorielle montre que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ldots)=\vec{0}$ donc au champ électrostatique $\vec{E}$, on peut associer un champ scalaire V, appelé **potentiel électrostatique**, défini par $\boxed{\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V}$, unité du potentiel : le Volt (noté V).

Rappel : par définition du $\overrightarrow{grad}$, $dV=\overrightarrow{grad}_M(V).\overrightarrow{dl}_M$.

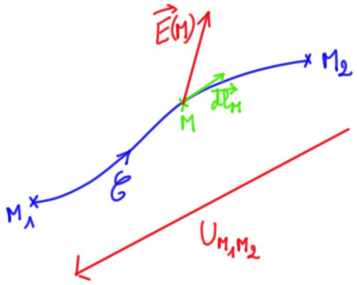
Remarques :

1. *L'unité de $\|\vec{E}\|$ est bien $V.m^{-1}$.*
2. *V étant défini par ses variations spatiales, il est défini à une constante près (c'est la différence de potentiel qui a une réalité physique).*
3. *On verra que V représente une énergie potentielle électrique, d'où son nom et le signe – apparaissant dans sa définition.*
4. *Exprimer $\vec{E}$ sous la forme de V est une simplification mathématique du problème : il ne reste qu'une inconnue scalaire V alors qu'on avait 3 inconnues scalaires (les 3 coordonnées de $\vec{E}$) …*

2. Circulation du champ électrostatique

a) Sur un contour quelconque

$$\int_{\substack{M_1\to M_2\\ C}} \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}_M=-\int_{\substack{M_1\to M_2\\ C}} \overrightarrow{grad}_M(V).\overrightarrow{dl}_M=-\int_{M_1}^{M_2} dV_M=V(M_1)-V(M_2)=U_{M_1M_2}$$



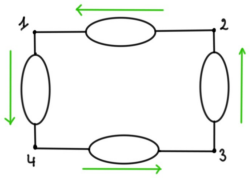
La différence de potentiel entre M_1 et M_2 représente la circulation du champ $\vec{E}$ de M_1 à M_2, quel que soit le chemin C suivi !

b) Sur un contour fermé

Propriété : le champ électrostatique est à circulation conservative : $\oint_{M\in C_f} \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}_M=\iint_{Q\in S} \overrightarrow{rot}_Q\vec{E}.\overrightarrow{dS}_Q=0$, par le théorème de Stokes et (MF).

Remarques :

1. *C'est logique : $\oint_{P\in C_f} \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}_M=V(M_i)-V(M_f)=0$ car $M_i=M_f$.*
2. *C'est cette propriété qui démontre la **loi des mailles** si C_f est le circuit électrique !*
   $\vec{E}$ est à circulation conservative donc $\oint \vec{E}.\vec{dl}=0$ donc $V_1-V_1=0$ soit $(V_1-V_2)+(V_2-V_3)+(V_3-V_4)+(V_4-V_1)=0$



II. Topographie de V - Propriétés des lignes de champ $\vec{E}$ associées

L'évolution spatiale du potentiel V est lié à la répartition des charges dans l'espace : le potentiel est relativement fort proche des charges positives, relativement faible proche des charges négatives ; encore une fois défini à une constante près, d'où le « relativement » ...
On se demande ici comment se représenter graphiquement le potentiel qui est un champ scalaire.

1. Surface équipotentielle

a) Définitions

Surface équipotentielle $=\{M / V(M)=constante\}$.

Exemples :

- Visualisation pour deux charges positives :

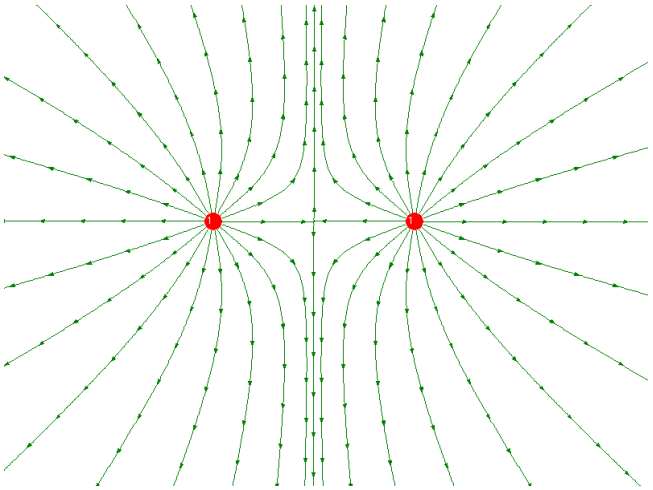


Figure 1

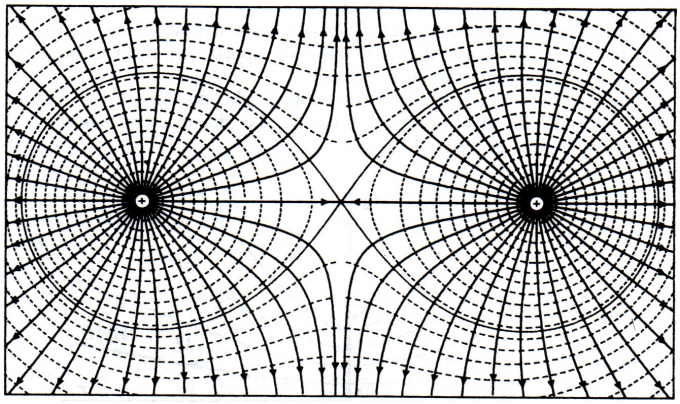


Figure 2

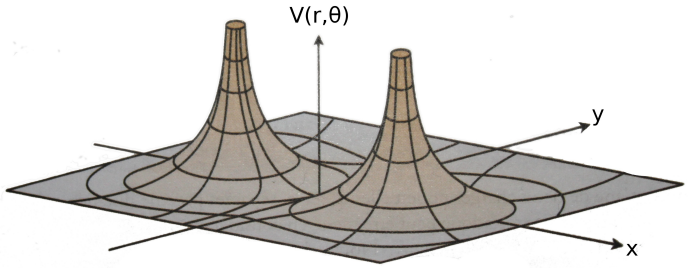


Figure 3

Figure 1 : lignes du champ électrostatique pour la distribution de charges considérée.
Figure 2 : lignes du champ électrostatique en traits pleins et surfaces équipotentielles en pointillés dans le plan considéré.
Figure 3 : représentation de la valeur du potentiel dans le plan considéré.

- Visualisation pour une charge positive et une charge négative :

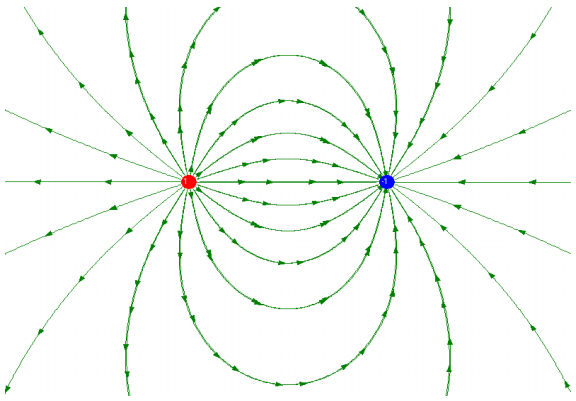


Figure 1

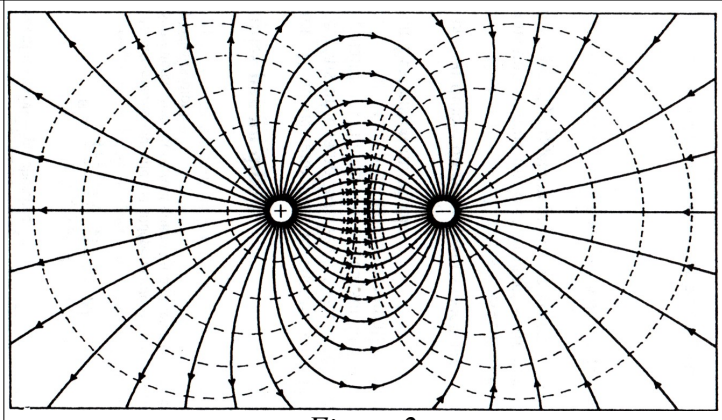


Figure 2

- Visualisation pour quatre charges :

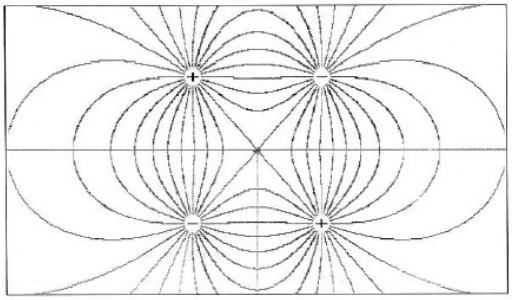


Figure 1

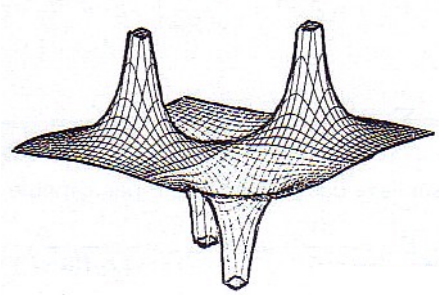
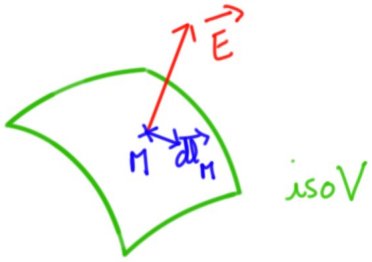


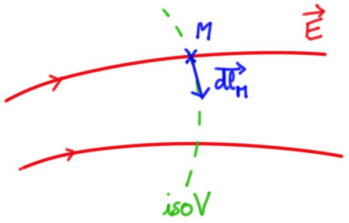
Figure 3

b) Propriétés des lignes de champ $\vec{E}$ (à savoir démontrer)

1. Les lignes de champ $\vec{E}$ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

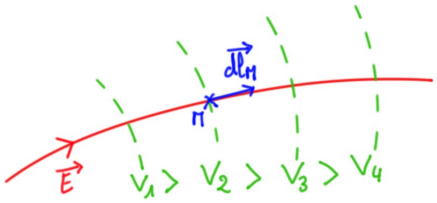
Démonstration : on considère un déplacement élémentaire $d\vec{l}_M$ le long d'une équipotentielle donc $dV=0$.
Or $dV=\overrightarrow{grad}_M V.d\vec{l}_M=-\vec{E}(M).d\vec{l}_M$ par définition du gradient et de V.
Il vient $\vec{E}(M).d\vec{l}_M=0$ soit $\vec{E}(M)\perp d\vec{l}_M$.





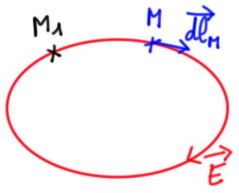
2. Le champ $\vec{E}$ et donc les lignes de champ électrostatique sont dirigées vers les potentiels décroissants.

Démonstration : on considère un déplacement élémentaire $d\vec{l}_M$ le long d'une ligne de champ $\vec{E}$ et orienté dans le même sens : $\vec{E}(M).d\vec{l}_M>0\Leftrightarrow-\overrightarrow{grad}_M V.d\vec{l}_M>0\Leftrightarrow-dV>0\Leftrightarrow dV<0$ le potentiel décroit !



3. Aucune ligne de champ $\vec{E}$ n'est une courbe fermée. Elle part d'une distribution de charge pour se terminer sur une autre (ou en un point où $\vec{E}$ s'annule).

Démonstration : par l'absurde …
Supposons qu'une ligne de champ $\vec{E}$ fermée existe.
On considère un déplacement élémentaire $d\vec{l}_M$ le long de cette ligne de champ, orienté dans le même sens :
$\vec{E}(M).d\vec{l}_M>0\Leftrightarrow dV<0\Leftrightarrow V(M_1)<V(M_1)$: ABSURDE !



Retour sur les exemples de topographie.

2. Propriétés de symétrie et d'invariance : principe de Curie

Les symétries et invariances de $V(M)$ sont les mêmes que celles de la distribution de charge.

Retour sur les exemples de topographie.

III. Énergie potentielle électrostatique

1. Définition par $\overrightarrow{F_{q'}}$

On considère une charge test q', située en M, plongée dans un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par une distribution de charge quelconque :
$\overrightarrow{F_{q'}} = q'\vec{E}(M)$, par définition de $\vec{E}(M)$;
donc, par définition du potentiel V, $\overrightarrow{F_{q'}}(M) = -q'\overrightarrow{grad}_M V = -\overrightarrow{grad}_M(q'V)$:

La force électrostatique dérive d'une énergie potentielle $\boldsymbol{E_p(M) = q'V(M) + cte}$; il s'agit de l'énergie potentielle **de** $\boldsymbol{q'}$**, en** $\boldsymbol{M}$**, plongée dans un champ** $\boldsymbol{\vec{E}}$**, de potentiel** $\boldsymbol{V}$ **.**

=0 par convention, V étant déjà défini à une cte près …

2. Définition par δW

$$\delta W(\vec{F}_{q'}) = \overrightarrow{F_{q'}}.\vec{dl}_M = q'\vec{E}(M).\vec{dl}_M = -q'\overrightarrow{grad}_M V.\vec{dl}_M = -q'.dV = -d(q'V)$$

On a bien $\delta W(\vec{F}_{q'}) = -d(E_p)$ avec $E_p(M) = q'V(M) + cte$.

3. Continuité du potentiel V

Il y a continuité du potentiel électrostatique dans l'espace.

IV. Densité volumique d'énergie électrique

Le champ électrique contient une énergie de type électrique.
Étant un champ, l'énergie qu'il contient est présente dans tout l'espace où $\vec{E}$ est non nul !

L'énergie volumique électrique (ou densité volumique d'énergie électrique) associée en $\boldsymbol{M}$ **à l'instant** $\boldsymbol{t}$ **est** $\boldsymbol{e_{élec}(M,t) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2(M,t)}$ **en** $\boldsymbol{J.m^{-3}}$ **.**

L'énergie électrique présente dans un volume V est donc $E_{élec}(t) = \iiint_{M\in V} \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2(M,t)\, d\tau_M$.

<u>Remarque</u> : on montrera la cohérence de cette définition avec le condensateur plan en TD !