Chapitre 1 : Cinématique du point

- Cinématique : description (mathématique) du mouvement sans se soucier des causes.
- Point matériel : solide dont les dimensions sont négligeables (le volume tend vers 0). Il est localisé en un point M de l'espace.

Exemple : étude de la chute d'une bille.

I. Repérage dans l'espace et dans le temps

1. Référentiel *R*

Définition : le référentiel R est le solide de référence par rapport auquel on étudie le mouvement du point matériel M.
Il doit toujours être précisé !

Exemple : salle de classe pour l'étude de la chute de la bille.

2. Repère spatial et temporel associés au référentiel d'étude

- Repère spatial (ou système de coordonnées) :
  - origine O et base orthonormée directe
  - unité SI de longueur : le mètre m.
- Repère temporel :
  - une horloge
  - **unité SI du temps : la seconde *s***
  - le temps est absolu, i.e. indépendant du référentiel d'étude (conception newtonienne, i.e. non relativiste).

3. Rappels sur les vecteurs

Cf cours de mathématiques ou annexe.

II. Grandeurs cinématiques

1. Vecteur position

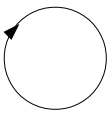
La position du point matériel M par rapport au référentiel d'étude R à l'instant t est définie par le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$ où O est l'origine fixe du repère lié au référentiel. Unité : $\|\overrightarrow{OM}(t)\|$ en ***m*** .

Remarque : s'il y a mouvement, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t)$.

La courbe décrite par le point matériel M **dans le référentiel *R*** au cours du temps est appelée **trajectoire**.

Exemple : le point matériel étudié est la valve d'une roue de vélo

trajectoire par rapport au cadre du vélo :



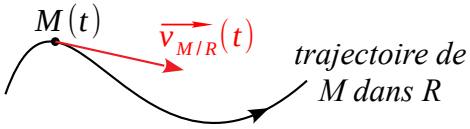
trajectoire par rapport au trottoir :

2. Vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}(t)$

On définit la vitesse instantanée du point M par rapport au référentiel R à l'instant t par le vecteur $\vec{v}_{M/R}(t)=\lim\limits_{dt\to 0}\left(\dfrac{\overrightarrow{OM}(t+dt)-\overrightarrow{OM}(t)}{(t+dt)-t}\right)_R$ donc $\boxed{\vec{v}_{M/R}(t)=\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R}$. **Unité de $\|\vec{v}_{M/R}\|$: $m.s^{-1}$.**

Remarques :

- $\vec{v}_{M/R}$ *dépend du référentiel d'étude R ;*
- $\vec{v}_{M/R}(t)$ *est porté par la tangente de la trajectoire en* $M(t)$.



Définition : on parle de mouvement uniforme si la norme de la vitesse est constante au cours du temps.

3. Vecteur accélération $\vec{a}_{M/R}(t)$

$\boxed{\vec{a}_{M/R}(t)=\left(\dfrac{d\vec{v}_{M/r}}{dt}\right)_R=\left(\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R}$ **; unité de $\|\vec{a}_{M/R}\|$: $m.s^{-2}$.**

Définition : on parle d'accélération uniforme (ou constante) si le vecteur accélération est constant au cours du temps.

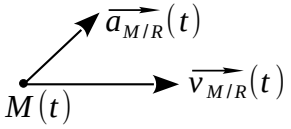
Remarque : $\vec{a}_{M/R}$ *dépend du référentiel d'étude R.*

4. Mouvement uniforme, accéléré ou décéléré ?

Pour répondre à cette question, il faut s'intéresser à l'évolution temporelle de $\|\vec{v}_{M/R}\|$ (ou de $\|\vec{v}_{M/R}\|^2$, ce qui est plus simple d'un point de vue calculs) :

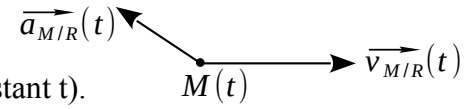
$$\frac{d(\|\vec{v}_{M/R}\|^2)}{dt}=\frac{d\vec{v}_{M/R}^2}{dt}=2\vec{v}_{M/R}(t).\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}=2\vec{v}_{M/R}(t).\vec{a}_{M/R}(t).$$

- Si $\vec{v}_{M/R}(t).\vec{a}_{M/R}(t)>0$: accéléré (à l'instant t).



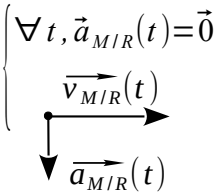
alors $\|\vec{v}_{M/R}\|$ augmente donc le mouvement est

- Si $\vec{v}_{M/R}(t).\vec{a}_{M/R}(t)<0$: mouvement est décéléré (à l'instant t).



alors $\|\vec{v}_{M/R}\|$ diminue donc le

- Si $\vec{v}_{M/R}(t).\vec{a}_{M/R}(t)=0$ pendant tout le mouvement : du mouvement donc le mouvement est uniforme.



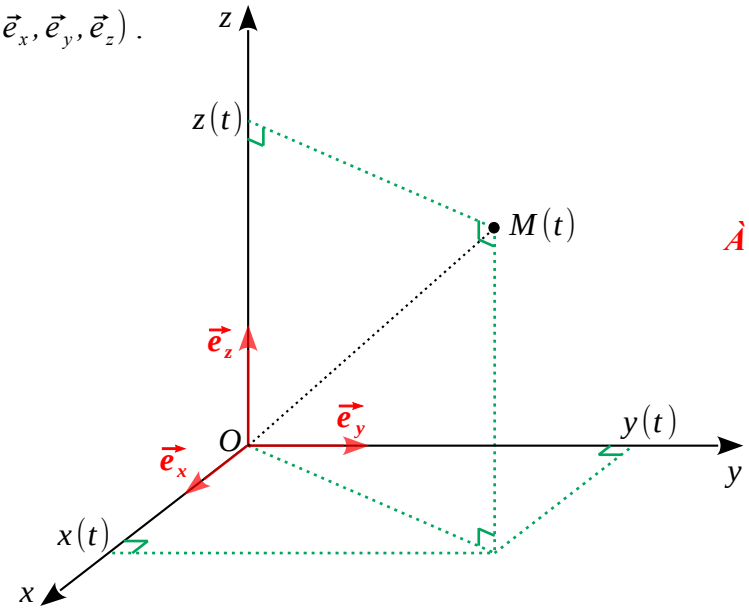
alors $\|\vec{v}_{M/R}\|$ est une constante

Remarque : en dynamique, on aura $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}$*, on parlera alors de force motrice ou de force résistante ou de force qui ne travaille pas (cf M3).*

III. Expressions des grandeurs cinématiques en coordonnées cartésiennes

1. Repère cartésien

- **Par définition, c'est un repère FIXE dans *R***, on peut alors choisir celui qui nous convient à condition qu'il soit **orthonormé direct**.
- Base cartésienne : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



À savoir faire seul, sur feuille blanche !

Remarque : le nom de la base cartésienne peut changer en fonction de l'exercice. En Physique, on l'appelle souvent $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

2. $\overrightarrow{OM}(t)$

$$\overrightarrow{OM}(t) = x_M(t)\vec{e}_x + y_M(t)\vec{e}_y + z_M(t)\vec{e}_z = \begin{vmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \\ z_M(t) \end{vmatrix}_{(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$

- $\begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \\ z_M(t) \end{pmatrix}$ sont les coordonnées cartésiennes de la position de M à l'instant t dans le repère choisi.
- $\|\overrightarrow{OM}(t)\| = \sqrt{\overrightarrow{OM}(t).\overrightarrow{OM}(t)} = \sqrt{x_M^2(t) + y_M^2(t) + z_M^2(t)}$

3. $\vec{v}_{M/R}(t)$

$\vec{v}_{M/R}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(x_M(t)\vec{e}_x + y_M(t)\vec{e}_y + z_M(t)\vec{e}_z\right) = \dfrac{dx_M}{dt}\vec{e}_x + \dfrac{dy_M}{dt}\vec{e}_y + \dfrac{dz_M}{dt}\vec{e}_z$ car la base cartésienne est fixe dans R.

En utilisant la notation $\dot{x}_M = \dfrac{dx_M}{dt}$ souvent utilisée en mécanique, il vient

$\vec{v}_{M/R}(t) = \dot{x}_M(t)\vec{e}_x + \dot{y}_M(t)\vec{e}_y + \dot{z}_M(t)\vec{e}_z$.

$\|\vec{v}_{M/R}(t)\| = \sqrt{\dot{x}_M^2(t) + \dot{y}_M^2(t) + \dot{z}_M^2(t)}$.

4. $\vec{a}_{M/R}(t)$

$\vec{a}_{M/R}(t) = \dfrac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{x}_M\vec{e}_x + \dot{y}_M\vec{e}_y + \dot{z}_M\vec{e}_z\right)$ soit $\vec{a}_{M/R}(t) = \ddot{x}_M(t)\vec{e}_x + \ddot{y}_M(t)\vec{e}_y + \ddot{z}_M(t)\vec{e}_z$.

$\|\vec{a}_{M/R}(t)\| = \sqrt{\ddot{x}_M^2(t) + \ddot{y}_M^2(t) + \ddot{z}_M^2(t)}$.

IV. Expressions des grandeurs cinématiques en coordonnées planes polaires (2D) coordonnées cylindriques (3D)

Les repères cartésiens ne sont pas les seuls repères utilisés en Physique. Il est parfois plus simple d'utiliser un repère mobile dans le référentiel d'étude R afin d'étudier le point matériel M.
Dans ce paragraphe, on étudie les repères mobiles polaire (2D) et cylindrique (3D).
En ATS, en mécanique, ils ne seront utiles que pour l'étude du pendule ; mais ils seront très utilisés pour la description en MF (mécanique des fluides) et en EM (électromagnétisme).

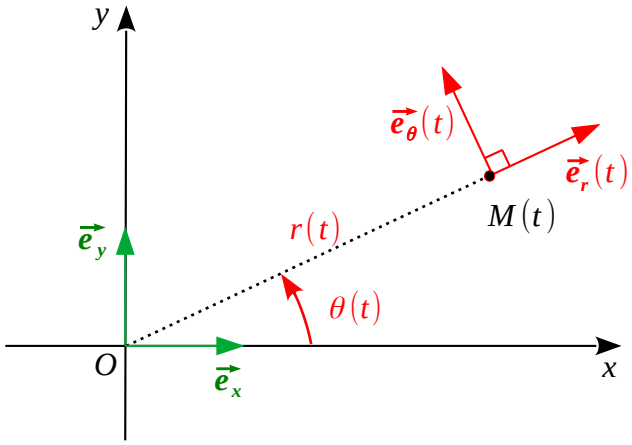
1. Coordonnées planes polaires

a) Définition de la base polaire

La base polaire est définie relativement à un repère cartésien fixe dans R.

Repère polaire : origine O + **base polaire** $\{\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t)\}$ où :

- $\vec{e}_r(t) = \dfrac{\overrightarrow{OM}(t)}{\|\overrightarrow{OM}(t)\|}$
- $\vec{e}_\theta(t)$: vecteur unitaire tel que l'angle $(\vec{e}_r(t), \vec{e}_\theta(t)) = +\dfrac{\pi}{2}$ (sens + dans le sens de l'angle θ croissant)



À savoir faire seul, sur feuille blanche !

La base polaire est une base mobile dans le référentiel R car elle dépend de la position du point M étudié.

Cela implique que les vecteurs de base $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent du temps t : $\vec{e}_r(t)$ et $\vec{e}_\theta(t)$ (mais par la suite, on notera $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ pour simplifier les notations).

b) Coordonnées planes polaires

Les coordonnées polaires de M sont $\begin{pmatrix} r(t) = \|\overrightarrow{OM}(t)\| \\ \theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{e}_r(t)) \end{pmatrix}$ *(voir le schéma ci-dessus)*.

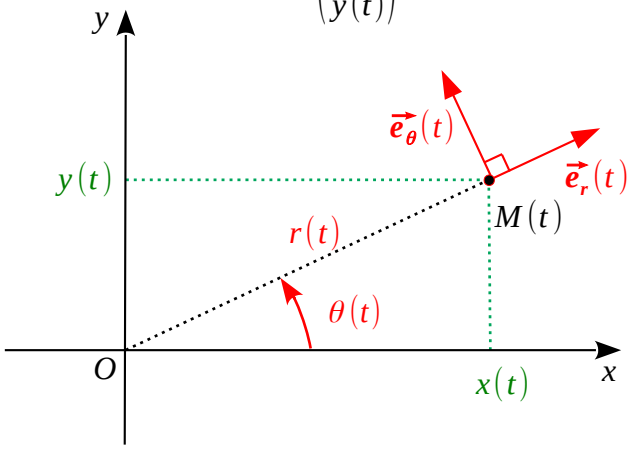
- La coordonnée polaire $r(t)$ est donc toujours positive ou nulle ; **unité mètre *m*.**
- La coordonnée polaire $\theta(t)$ peut être positive, négative ou nulle (nécessite la définition d'un sens +) ; **unité : radian *rad*.**

<u>Remarques</u> :

1. *Le radian est sans dimension (i.e. qu'un angle n'a pas d'unité physique dans le SI). On lui associe le radian, par opposition au degré °, qui n'est pas naturel et contient donc une unité intrinsèque.*
2. *θ est un angle orienté (i.e. positif ou négatif), il faut donc définir le sens positif choisi. En général, on prend θ croissant dans le sens du mouvement.*

c) Relation de passage coordonnées polaires / coordonnées cartésiennes

On considère un point M de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et de coordonnées polaires $\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$.



- Connaissant $\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$, on obtient : $\boxed{\begin{cases} x(t)=r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t)=r(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}}$ *(simples projections).*
- Connaissant $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on obtient : $\boxed{\begin{cases} r(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2} \\ \tan(\theta(t))=\dfrac{y(t)}{x(t)} \end{cases}}$

d) Dérivation temporelle des vecteurs de base polaire

Les vecteurs de bases non cartésiennes ne sont pas fixes ! Pour la base polaire, on admet :

$\boxed{\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta}$ et $\boxed{\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_r}$; $\dot{\theta}(t)$ est la vitesse angulaire de M dans le référentiel R ; **unité : rad.s^{-1}**.

<u>Remarque</u> : ces expressions sont normalement HP mais nécessaires pour la vitesse du pendule et la résolution d'un exercice d'oral.

2. Expressions des grandeurs cinématiques en coordonnées polaires

a) Vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$

$\boxed{\overrightarrow{OM}(t)=r(t)\vec{e}_r}$ $= \begin{vmatrix} r(t) \\ 0 \end{vmatrix}_{(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)}$.

- les coordonnées polaires du point M sont $\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$ (car θ est nécessaire pour connaître $\vec{e}_r$) ;
- la norme du vecteur position (distance entre O et M) est $\|\overrightarrow{OM}(t)\|=\sqrt{r(t)^2}=r(t)$.

b) Vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}(t)$

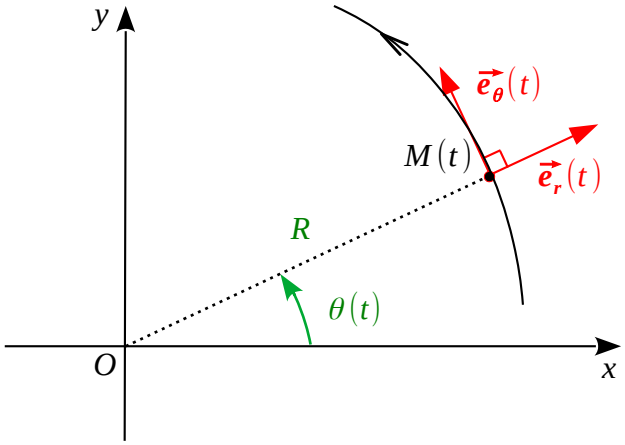
$\vec{v}_{M/R}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(r(t)\,\vec{e}_r\right)$ (on utilise $(uv)'=u'v+uv'$)

Soit $\vec{v}_{M/R}(t) = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r(t)\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$ d'où $\boxed{\vec{v}_{M/R}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta}$.

Les coordonnées polaires du vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}(t)$: $\begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ r(t)\dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$, $\dot{r}(t)$ est appelée « vitesse radiale » et $r(t)\dot{\theta}(t)$ est appelée « vitesse orthoradiale ».

3. Cas particulier du mouvement circulaire plan

a) Définition



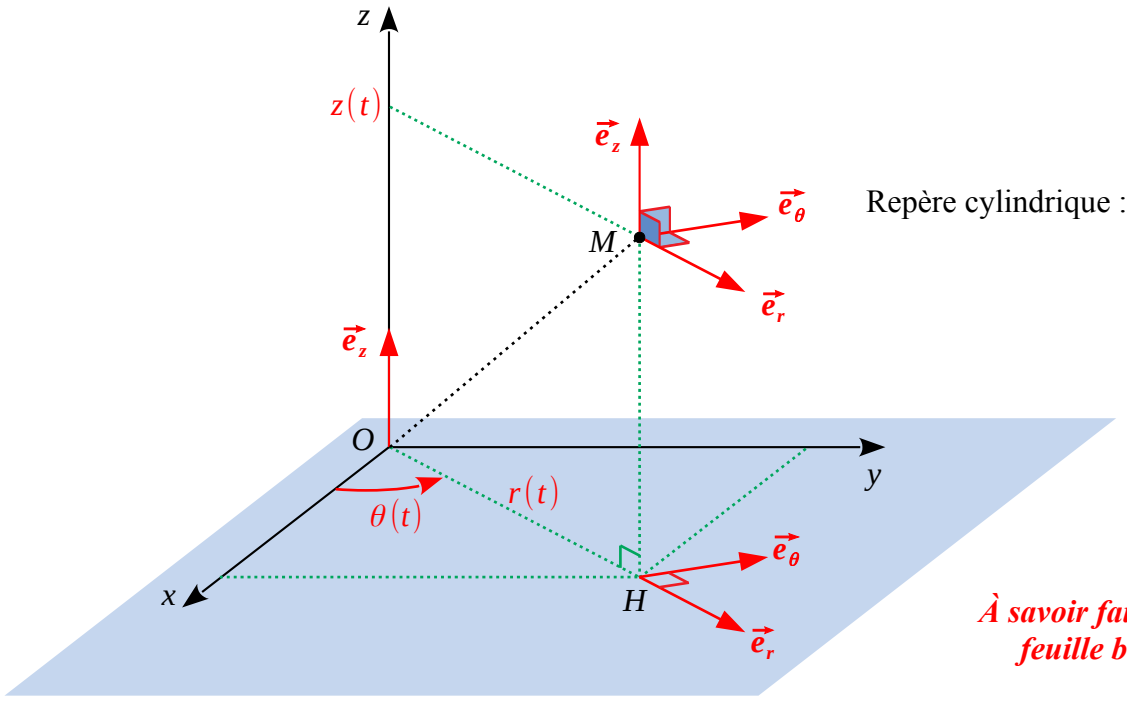
Trajectoire de M : portion de cercle de rayon $\boldsymbol{R = cte}$.

b) Expression des grandeurs cinématiques

- $\overrightarrow{OM}(t) = R\,\vec{e}_r$
- $\boxed{\overrightarrow{v_{M/R}}(t) = R\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta}$ **: vitesse purement orthoradiale pour un mouvement circulaire.**
- $\overrightarrow{a_{M/R}}(t) = -R\,\dot{\theta}(t)^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta$

4. À 3D : coordonnées cylindriques

a) Définition de la base cylindrique



Repère cylindrique : $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

À savoir faire seul, sur feuille blanche !

b) Expression des grandeurs cinématiques

i. $\overrightarrow{OM}(t)$

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\,\vec{e}_r + z(t)\,\vec{e}_z = \begin{vmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{vmatrix}_{(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)}.$$

- les coordonnées polaires du point M sont $\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ (car θ est nécessaire pour connaître $\vec{e}_r$) ;
- la norme du vecteur position (distance entre O et M) est $\|\overrightarrow{OM}(t)\| = \sqrt{r(t)^2 + z(t)^2}$.

ii. $\vec{v}_{M/R}(t)$

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z$$

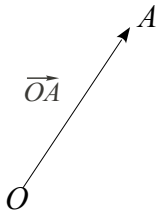
Annexe

I. Vecteur

1. Définition

Un vecteur $\overrightarrow{OA}$ est un objet mathématique représenté par une flèche et défini par :

- sa **norme** (la « longueur » du segment [OA])
- sa **direction** (horizontale, verticale, … etc)
- son **sens** (vers la droite ou la gauche, vers le haut ou le bas , … etc)

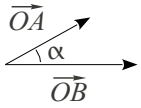


2. Produit scalaire de deux vecteurs

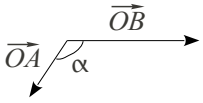
a) Définition et propriétés

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. On définit le produit scalaire de ces deux vecteurs par :

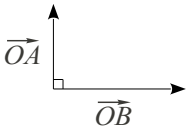
$$\boxed{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|\times\cos\alpha}$$ avec α l'angle entre les deux vecteurs.



si $\alpha<\frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}>0$



si $\alpha>\frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}<0$



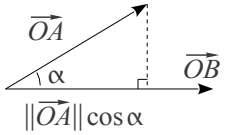
si $\alpha=\frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

Propriétés du produit scalaire :

- **commutatif** : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$
- **distributif** : $\overrightarrow{OA}.\left(b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\right)=b\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$ où b et c sont deux scalaires.

b) Remarque géométrique

Graphiquement, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ est égal à la norme $\|\overrightarrow{OB}\|$ multiplié par la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur la droite portant le vecteur $\overrightarrow{OB}$.



3. Norme d'un vecteur

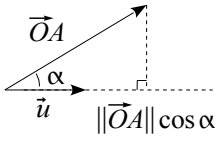
a) Définition

La norme $\|\overrightarrow{OA}\|$ d'un vecteur $\overrightarrow{OA}$ s'exprime par : $\boxed{\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA}}}$

b) Vecteur unitaire

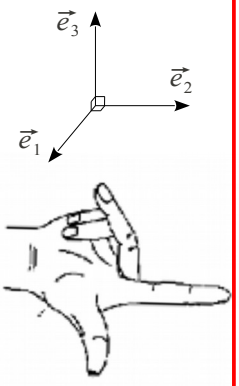
Un **vecteur unitaire** est, par définition, un vecteur dont la **norme vaut 1.**

Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{OA}$ et d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ est $\overrightarrow{OA}.\vec{u}=\|\overrightarrow{OA}\|.\cos\alpha$.
D'un point de vue géométrique, il s'agit de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur la droite portant le vecteur unitaire $\vec{u}$.



II. Expression d'un vecteur dans un repère

1. Base orthonormée directe



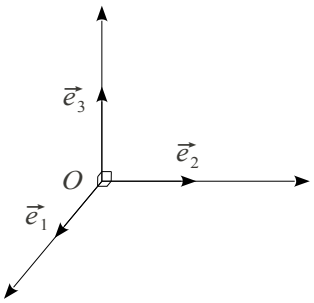
En physique, on utilise une base pour se repérer dans l'espace. L'espace étant à 3 dimensions, il suffit de **3 vecteurs de base** pour exprimer tout vecteur : $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ (si on travaille dans un plan, 2 vecteurs de base suffisent). On utilise, en physique, une **base orthonormée directe**.

La base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...)$ est dite **orthonormée** si et seulement si :

- les vecteurs de base sont **unitaires** : $\|\vec{e}_1\|=\|\vec{e}_2\|=...=1$.
- les vecteurs de base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, … sont **orthogonaux deux à deux** ($j\neq i$, $\vec{e}_j.\vec{e}_i=0$).

La base est dite de plus **directe** si la direction et le sens des trois vecteurs de base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ sont donnés par la **règle de la main droite**.

2. Repère orthonormé direct



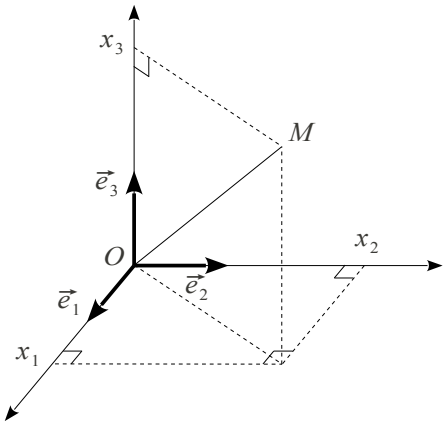
Un repère orthonormé direct est constitué d'une **origine O** et d'une **base orthonormale directe** : $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Un repère permet d'exprimer les **coordonnées d'un point M**.

3. Expression d'un vecteur dans un repère

a) Vecteur $\overrightarrow{OM}$

Grâce à la définition d'un repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, on a : $\overrightarrow{OM}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ où x_1 , x_2 , x_3 sont les **coordonnées du point M** dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.



Les coordonnées x_1 , x_2 et x_3 du point M dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ correspondent aux **projections** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les 3 axes du repère. Ces projections sont les produits scalaires entre $\overrightarrow{OM}$ et les vecteurs de base : $\boldsymbol{x_1=\overrightarrow{OM}.\vec{e}_1}$, $\boldsymbol{x_2=\overrightarrow{OM}.\vec{e}_2}$, $\boldsymbol{x_3=\overrightarrow{OM}.\vec{e}_3}$.

Démonstration par le calcul :

$\overrightarrow{OM}.\vec{e}_1=(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3).\vec{e}_1=x_1\vec{e}_1.\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2.\vec{e}_1+x_3\vec{e}_3.\vec{e}_1=x_1$

car, le repère étant orthonormé $\vec{e}_1.\vec{e}_1=1$ *et* $\vec{e}_2.\vec{e}_1=\vec{e}_3.\vec{e}_1=0$.

b) Expression d'un produit scalaire dans un repère

On considère le repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ et 2 vecteurs de ce repère : $\overrightarrow{OA}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ et $\overrightarrow{OB}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ s'exprime dans le repère orthonormé direct comme :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3).(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$

c) Norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$

La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ s'exprime dans le repère $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ comme :

$$\boxed{\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$