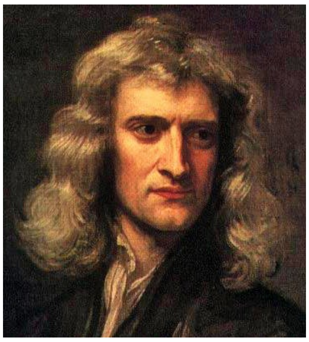
ATS Jules Ferry — Chapitre 3 : Travail et énergie en dynamique du point — M3

<u>Introduction</u> : *l'Histoire des Sciences retient deux précurseurs de la dynamique et du calcul différentiel et intégral, malheureusement ils ne s'aimaient pas :*



Isaac Newton
Anglais 1643/1727

Compréhension de la dynamique basée sur la quantité de mouvement : $\vec{p}=m\vec{v}$ (1687 ; cf M2)

Gottfried Wilhelm Leibniz
Allemand 1646/1716

En étudiant les chocs, Leibniz pense que la compréhension de la dynamique ne passe pas par la quantité de mouvement de Newton mais par « la force vive » mv^2 (1691 ; aujourd'hui appelée $2E_c$)

À cette époque, on pense que les 2 points de vue sont incompatibles et les physiciens choisissent leur camp … En France, Émilie du Châtelet a permis la diffusion des idées de Newton en traduisant les <u>Principia</u> en français (elle fait encore autorité aujourd'hui puisqu'elle reste la seule personne à avoir traduit cette œuvre en français).
Elle ne s'arrêtera pas là : en comprenant que les idées de Leibniz sont aussi intéressantes (et pas incompatibles avec les idées de Newton), elle les expliquera en démontrant expérimentalement les propos de Leibniz !
(Étude de la chute d'une bille dans du sable où la déformation est proportionnelle à mv^2 lors du choc).

Émilie du Châtelet
1706/1749

La compréhension totale de la mécanique, par le point de vue de Leibniz (i.e. point de vue énergétique), mettra du temps à se mettre en place. Il faudra attendre 1829 pour que les travaux de Coriolis et Poncelet (français, merci à Mme du Châtelet) permettent une telle compréhension à partir des idées de Newton ! On propose d'ailleurs de construire le cours par ce cheminement de pensées.

Le point de vue énergétique n'offrira pas d'outil plus important que la 2ème loi de Newton pour résoudre un exercice de mécanique classique.
Pourquoi l'étudions-nous ? Pour de multiples raisons :

- *le point de vue énergétique de la mécanique classique permet parfois de résoudre un exercice de manière plus rapide et plus simple que par la 2ème loi de Newton (cf. le pendule simple, par exemple) ;*
- *ce chapitre introduit de nouveaux concepts nécessaires à la compréhension de la physique moderne :*
  - *le concept d'énergie est nécessaire pour la thermodynamique, la relativité restreinte et la relativité générale ;*
  - *une réécriture de ce chapitre par Sir William Hamilton en 1833 (aidé par les travaux de Lagrange) est la base des équations fondamentales de la mécanique quantique (peut être avez-vous déjà entendu parler de l'équation de Schrödinger ?…).*

I. Puissance et travail d'une force

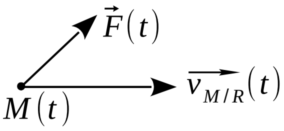
1. Puissance d'une force

On considère un point matériel M, de masse m, en mouvement dans le référentiel d'étude R et soumis à une force $\vec{F}$.

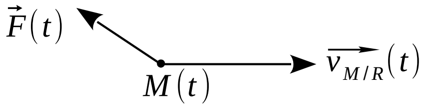
<u>Définition</u> : la puissance de la force $\vec{F}$, s'exerçant sur M, dans le référentiel R, à l'instant t est : $\boxed{P_{\vec{F}}(M/R,t)=\vec{F}(t).\vec{v}_{M/R}(t)}$ **; <u>unité</u> : Watt $1\,W=1\,N.m.s^{-1}$.**

<u>Remarques</u> :

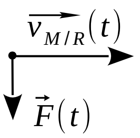
1. *Il s'agit de la puissance reçue par M de la part de la force $\vec{F}$*
   ou puissance fournie par la force $\vec{F}$ au point M.
2. *La puissance est une grandeur algébrique :*

- Si $P_{\vec{F}}(t)>0$: 

alors la force est motrice et $\|\vec{v}_{M/R}\|$ augmente.

- Si $P_{\vec{F}}(t)<0$: 

alors la force est résistante et $\|\vec{v}_{M/R}\|$ diminue.

- Si $P_{\vec{F}}(t)=0$: $\left\{ \forall t, \vec{F}(t)=\vec{0} \right.$ 

alors $\|\vec{v}_{M/R}\|$ n'évolue pas à t.

<u>Propriétés</u> :

1. $P_{\vec{F}}(M/R,t)$ dépend du référentiel R, comme $\vec{v}_{M/R}$.
2. L'additivité des forces $\Rightarrow$ additivité des puissances.

2. Travail d'une force

<u>Définition</u> : le travail de la force $\vec{F}$, s'exerçant sur le point matériel M, dans le référentiel R, entre les instants t_i et t_f est : $\boxed{W_{t_i \to t_f}(\vec{F},M/R)=\int_{t_i}^{t_f} P_{\vec{F}}(M/R,t)\,dt}$ **; <u>unité</u> : Joule $1\,J=1\,W.s=1\,N.m$.**

<u>Remarques</u> :

1. *Il s'agit de l'énergie reçue par M de la part de la force $\vec{F}$ entre t_i et t_f*
   ou énergie fournie par la force $\vec{F}$ au point M entre t_i et t_f.
2. $P_{\vec{F}}(M/R,t)$ *représente alors la quantité d'énergie reçue par M, par unité de temps, à l'instant t.*
3. *Si $\vec{F}$ est orthogonale à la trajectoire à tout instant (donc à $\vec{v}_{M/R}$), on dit que la force $\vec{F}$ ne travaille pas :* $\forall t, P_{\vec{F}}(M/R,t)=0 \;\Rightarrow\; W_{t_i \to t_f}(\vec{F},M/R)$.

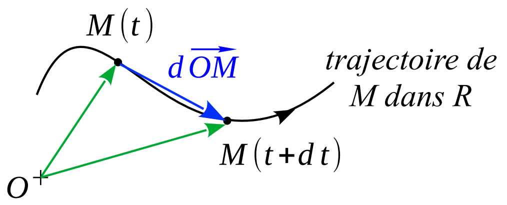
<u>Propriétés</u> :

1. $W_{t_i \to t_f}(\vec{F},M/R)$ dépend du référentiel R, comme $P_{\vec{F}}(M/R,t)$.
2. L'additivité des forces $\Rightarrow$ additivité des travaux.

3. Travail et déplacement élémentaires

L'intérêt de ce paragraphe réside dans l'existence des forces conservatives, cf III.

a) Déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$



Pendant l'intervalle de temps dt infinitésimal (ou élémentaire, i.e. « tout petit »), M se déplace de : $d\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}(t+dt)-\overrightarrow{OM}(t)=\vec{v}_{M/R}(t).dt$, appelé **déplacement élémentaire** $\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}=\vec{v}_{M/R}(t).dt}$.

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, $\boxed{d\overrightarrow{OM}=dx\,\vec{e}_x+dy\,\vec{e}_y+dz\,\vec{e}_z}$.

b) Travail élémentaire d'une force $\delta W_{\vec{F}}$

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ entre t et $t+dt$ (avec dt infinitésimal) est : $\delta W_{\vec{F}}(M/R)=P_{\vec{F}}(M/R,t).dt=\vec{F}.\vec{v}(M/R,t).dt$ soit $\boxed{\boldsymbol{\delta W_{\vec{F}}=\vec{F}.d\overrightarrow{OM}}}$.

Il vient alors $\boxed{W_{t_i\to t_f}(\vec{F},M/R)=\int_{t_i}^{t_f}\delta W_{\vec{F}}(M/R)=\int_{M_i}^{M_f}\vec{F}.d\overrightarrow{OM}}$: le travail peut s'écrire comme l'intégrale le long de la trajectoire entre la position initiale M_i et la position finale M_f.

II. Énergie cinétique d'un point matériel

1. Définitions

L'énergie cinétique d'un point matériel M, de masse m, de vitesse $\vec{v}_{M/R}(t)$, dans le référentiel d'étude R, est : $\boxed{E_c(M/R,t)=\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{M/R}(t)}$ **; unité : Joule.**

2. Théorème de la puissance cinétique

Pour un point matériel M, de masse m, soumis à des forces de résultante $\vec{F}_{ext}$ et étudié dans un **référentiel galiléen** R_g : $\boxed{\forall t, \left(\frac{dE_c(M/R_g,t)}{dt}\right)_{R_g}=P_{\vec{F}_{ext}}(M/R_g,t)}$

Remarque : dans le cadre du programme ATS, il ne s'agit que d'une transition vers le théorème de la puissance mécanique (TPM).

3. Démonstration (à savoir puisqu'il faudra savoir démontrer le TPM)

On est dans un référentiel galiléen, on peut donc appliquer la deuxième loi de Newton à M :

$\vec{F}_{ext}=m\left(\frac{d\vec{v}_{M/R_g}}{dt}\right)_{R_g}$ donc par un produit scalaire avec $\vec{v}_{M/R_g}$, on obtient :

$$P_{\vec{F}_{ext}}=m\left(\frac{d\vec{v}_{M/R_g}}{dt}\right)_{R_g}.\vec{v}_{M/R_g}(t)$$

$$=m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2_{M/R_g}\right)$$

soit $P_{\vec{F}_{ext}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{M/R_g}\right)$.

Remarques :

1. *une puissance reçue est bien une énergie reçue par unité de temps.*
2. *Travail et énergie ont bien la même dimension physique.*

III. Énergie potentielle

Introduction par powerpoint.

1. Force conservative $\vec{F}_c$

<u>Définition</u> : une force est dite <u>conservative</u> si le <u>travail</u> de cette force entre 2 points M_i et M_f <u>ne dépend pas du chemin suivi</u> par le point matériel M étudié mais seulement des points M_i et M_f .

<u>Exemple</u> : le poids.
<u>Contre-exemple</u> : les forces de frottement.

2. Énergie potentielle

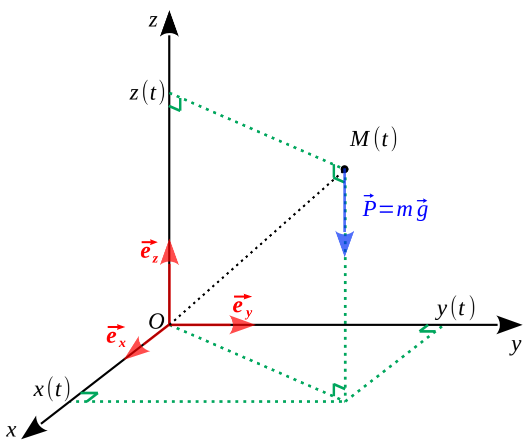
<u>Définition</u> : on peut associer, à toute <u>force conservative</u> $\vec{F}_c$, une <u>énergie potentielle</u> E_p définie par : $\boxed{\delta W_{\vec{F}_c} \underset{calc}{\overset{déf}{=}} -d E_p}$ où $E_p(M)$ est une fonction qui ne dépend <u>que de la position</u> de M . <u>Unité</u> : Joule.

i.e. que le travail élémentaire de $\vec{F}_c$ peut s'écrire comme une petite variation.

<u>Remarques</u> :
1. *On dit que la force conservative $\vec{F}_c$ dérive de l'énergie potentielle E_p (on verra pourquoi au chapitre EM1).*
2. *L'énergie potentielle étant définie à partir de sa variation spatiale, elle est définie à une constante près (on fixe l'origine de l'énergie potentielle où l'on veut). Cf le potentiel électrique EM1.*
3. *Additivité des travaux $\Rightarrow$ additivité des énergies potentielles : $\vec{F}_{c1}+\vec{F}_{c2}$ dérive de $E_{p1}+E_{p2}$.*

3. Exemples de forces conservatives à connaître

a) Énergie potentielle de pesanteur E_{pp}



$\vec{P}=-mg\vec{e}_z$

On considère un déplacement élémentaire quelconque du point M : $d\overrightarrow{OM}=dx\,\vec{e}_x+dy\,\vec{e}_y+dz\,\vec{e}_z$.

$\delta W_{\vec{P}}=\vec{P}.d\overrightarrow{OM}=-mg\,\vec{e}_z.(dx\,\vec{e}_x+dy\,\vec{e}_y+dz\,\vec{e}_z)$

$=-mg\,dz$

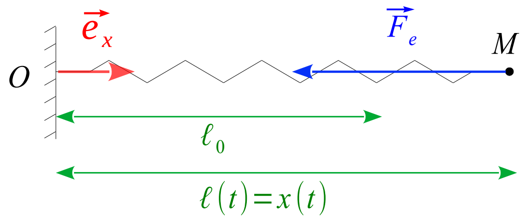
$\overset{?}{=}-d(E_{pp})$: *« on se demande si on peut l'écrire sous la forme d'une petite variation d'une fonction de la position de M »*

Posons nous la question autrement : $\frac{dE_{pp}}{dz}\overset{?}{=}mg$: *« peut-on trouver une primitive de mg par rapport à z ? »*

La réponse est oui : $E_{pp}=mgz+cte$ donc le poids est une force conservative !

<u>Conclusion</u> : le poids est une force conservative.
L'énergie potentielle de pesanteur associée, avec Oz <u>verticale ascendante</u>, est $\boxed{E_{pp}(z)=mgz+cte}$.
⚠ pour une verticale descendante, $E_{pp}(z)=-mgz+cte$

b) Énergie potentielle élastique E_{pe}



donc ici $d\overrightarrow{OM}=dx\,\vec{e}_x=dl\,\vec{e}_x$

$$\vec{F}_e=-k(l-l_0)\vec{e}_x$$
$$\delta W_{\vec{P}}=\vec{F}_e.d\overrightarrow{OM}=-k(l-l_0)\vec{e}_x.(dl\,\vec{e}_x)$$
$$\stackrel{?}{=}-d(E_{pe})$$

soit $\frac{dE_{pe}}{dl}\stackrel{?}{=}k(l-l_0)$, la réponse est oui : $E_{pe}(l)=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2+cte$ donc la force de rappel élastique est conservative !

<u>Conclusion</u> : la force de rappel élastique est une force conservative.
L'énergie potentielle élastique associée, pour un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, est $\boxed{E_{pe}(l)=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2+cte}$.

IV. Énergie mécanique d'un point matériel

1. Définition

L'énergie mécanique d'un point matériel M, dans le référentiel d'étude R, est : $\boxed{E_m(M/R,t)=E_c(M/R,t)+E_p(M/R,t)}$, où $E_p(M/R,t)$ est l'énergie potentielle dont dérivent <u>toutes</u> les forces conservatives qui s'appliquent sur M.

<u>Remarque</u> : l'énergie mécanique est définie à une constante près, comme E_p.

2. Théorème de la puissance mécanique (TPM)

<u>Énoncé du TPM</u> :
Dans un <u>référentiel galiléen</u>, le mouvement d'un point matériel M, soumis à des forces conservatives dérivant de E_p, ainsi qu'à des forces non conservatives de résultante $\vec{F}_{NC}$, est tel que :

$$\boxed{\forall t, \left(\frac{dE_m(M/R_g,t)}{dt}\right)_{R_g}=P_{\vec{F}_{NC}}(M/R_g,t)}$$

<u>Remarque</u> : il s'agit d'une loi de la dynamique qui permet la prédiction du mouvement (en l'appliquant, on obtient l'équation du mouvement à condition d'avoir un problème à un seul degré de liberté).

En intégrant le TPM entre les deux instants t_1 et t_2, on obtient :
Le **<u>théorème de l'énergie mécanique</u>** (TEM) : $\boxed{E_m(M/R_g,t_2)-E_m(M/R_g,t_1)=W_{t_1\to t_2}(\vec{F}_{NC},M/R_g)}$.

<u>Remarque</u> : le TEM permet de connaître la $\|\vec{v}\|$ en une position particulière et inversement (connaître la position pour une $\|\vec{v}\|$ particulière) à condition d'avoir un mouvement à un seul degré de liberté.

3. Démonstration (à connaître à partir de la 2ème loi de Newton !)

On est dans un référentiel galiléen, on peut donc appliquer le TPC : $\dfrac{dE_c(M/R_g)}{dt}=P_{\vec{F}_{ext}}(M/R_g,t)$

avec $P_{\vec{F}_{ext}}=P_{\vec{F}_{NC}}+P_{\vec{F}_C}$ et $\delta W_{\vec{F}_c}=P_{\vec{F}_c}.dt=-dE_p$ soit $P_{\vec{F}_c}=-\dfrac{dE_p}{dt}$

il vient $\dfrac{dE_c(M/R_g)}{dt}=P_{\vec{F}_{NC}}(M/R_g,t)-\dfrac{dE_p(M/R_g)}{dt}$

d'où $\dfrac{d\left(E_c(M/R_g)+E_p(M/R_g)\right)}{dt}=P_{\vec{F}_{NC}}(M/R_g,t)$.

<u>Remarque</u> : par cette démonstration, on voit que $TPM \Leftrightarrow TPC$ mais quand on utilise le TPM, on n'a pas besoin de calculer $P_{\vec{F}_c}$ (plus simple et plus rapide), c'est pourquoi le programme d'ATS se limite au TPM.

4. Cas où l'énergie mécanique se conserve ($E_m = cte$)

Si $\forall t, P_{\vec{F}_{NC}}(M/R_g, t) = 0$: $\begin{cases} \text{pas de force non conservative ou} \\ \text{les forces non conservatives ne travaillent pas} \end{cases}$

Alors le TPM $\Rightarrow$ $\boxed{\forall t, E_m(M/R_g, t) = cte}$ donnée par les conditions initiales : $\forall t, E_m(M/R_g, t) = E_m(M/R_g, t=0)$.

L'énergie mécanique se conserve, c'est une constante du mouvement.

<u>Remarque</u> : l'énergie cinétique peut être transformée en énergie potentielle, et inversement (cf TP2 : Étude du pendule).

V. Étude qualitative d'un système conservatif à 1 degré de liberté

1. Mise en place du problème

- Système : point matériel M , de masse m ;
- Référentiel d'étude : référentiel galiléen (terrestre, par exemple) ;
- <u>Système conservatif</u> : $\forall t, P_{\vec{F}_{NC}}(M/R_g, t) = 0$ et donc $\boxed{E_m(M/R_g, t) = cte}$ par TPM.
- <u>1 degré de liberté</u> : la position de M est entièrement repérée par une seule variable, appelée $x(t)$ ici.
  Exemples :
  - *ressort horizontal : variable $x(t)$;*
  - *ressort vertical : variable $y(t)$;*
  - *pendule : variable $\theta(t)$.*
- On suppose que l'on connaît la forme de $E_p(x)$.

2. Mouvements permis

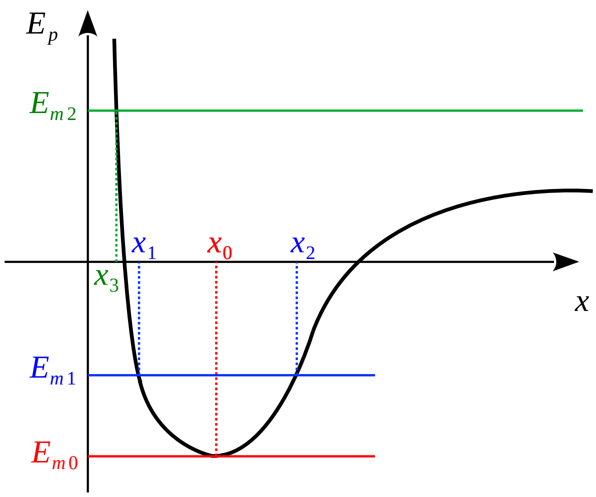
Par TPM, $E_m(M/R_g, t) = cte = E_m(M/R_g, t=0) = E_m$ connue par les conditions initiales ;

$$= E_c(M/R_g, t) + E_p(M/R_g, t) \text{ avec } E_c(M/R_g, t) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2_{M/R_g}(t) \geqslant 0 \text{ par définitions ;}$$

Il vient donc : $\boxed{\boldsymbol{\forall t, E_m \geqslant E_p(M/R_g, t)}}$**, qui offre les positions permises.**

<u>Remarque</u> : l'égalité est vérifiée aux instants où $\|\vec{v}_{M/R_g}\| = 0$.

<u>Exemple</u> : on suppose que l' $E_p(x)$ est de la forme :



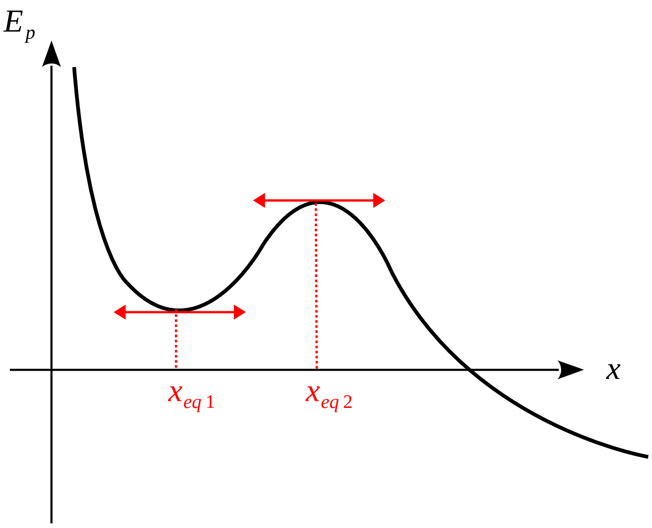
- Si $E_m = E_{m1}$ alors $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$,
  le système est dans un **<u>état lié</u>** : x reste borné.
- Si $E_m = E_{m0}$ alors $x = x_0$,
  le système est en position d'équilibre.
- Si $E_m = E_{m2}$ alors $x_3 \leqslant x$,
  le système est dans un **<u>état de diffusion</u>** : $x \underset{t \to \infty}{\to} \infty$.

Remarques :

1. $E_c(M/R_g,t)=\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{M/R_g}(t)=E_m-E_p(t)$.

2. $E_{c\,max}=\frac{1}{2}m\vec{v}^2_{max}=E_m-E_{p\,min}$.

3. Positions d'équilibre



Les positions d'équilibre sont telles que $\boxed{\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}}=0}$

(i.e. aux extremums locaux de l'énergie potentielle).

Remarque :

- *la position d'équilibre est stable si* $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}>0$ *: minimum local d'énergie potentielle comme* $x_{eq\,1}$
- *la position d'équilibre est instable si* $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}<0$ *: maximum local d'énergie potentielle comme* $x_{eq\,2}$.