

II. Oscillateur libre à un degré de liberté amorti

3. Régime apériodique : $\Delta > 0$ ($Q < \frac{1}{2}$)

- $\forall t > 0, X(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$ avec $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot [1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2}]$.

On a alors $r_2 < r_1 < 0$ et $|r_1| < |r_2|$.

- Détermination des deux constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} X(t=0) = X_0 \\ \dot{X}(t=0) = 0 \end{cases} \text{ avec } \forall t > 0, \dot{X}(t) = A r_1 e^{r_1 t} + B r_2 e^{r_2 t}.$$

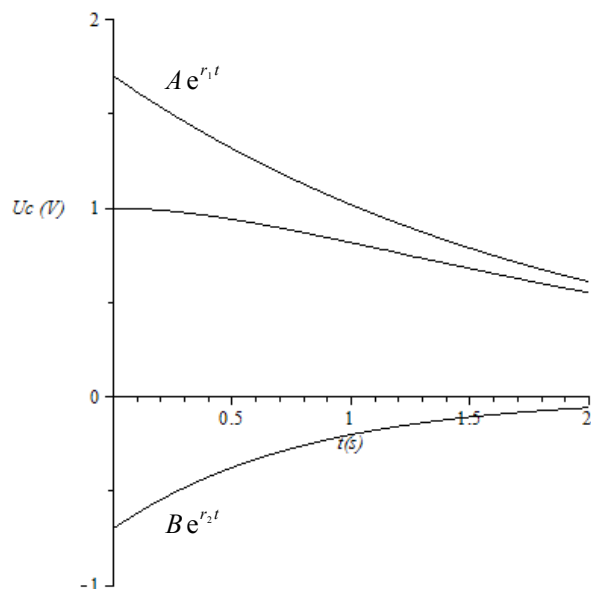
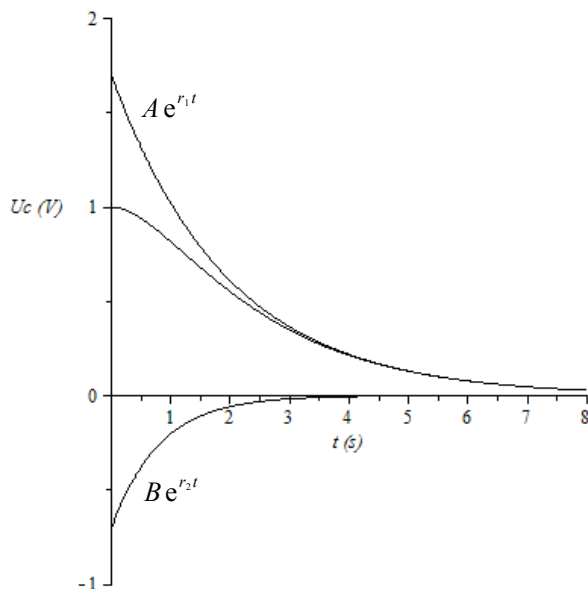
Il vient alors le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} A + B = X_0 & (1) \\ A r_1 + B r_2 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2) - r_1(1) \\ (2) - r_2(1) \end{cases} \begin{cases} B(r_2 - r_1) = -r_1 \cdot X_0 \\ A(r_1 - r_2) = -r_2 \cdot X_0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} A = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \cdot X_0 \\ B = -\frac{r_1}{r_2 - r_1} \cdot X_0 \end{cases}}$$

La solution analytique de $X(t)$ est donc entièrement résolue !

- Représentation graphique :

Courbes obtenues pour $X_0 = 1\text{m}$, $\dot{X}(t=0) = 0$, $Q = \frac{1}{2,2} \simeq 0,45$ et $\omega_0 = 0,8\text{rad.s}^{-1}$



Remarque : on constate que, très vite, $X(t)$ est proche de $A \cdot e^{r_1 t}$ on peut alors dire que le temps de relaxation τ de ce système est proche du temps de relaxation de $A \cdot e^{r_1 t}$: $\tau \simeq \frac{1}{|r_1|}$.

4. Régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$ ($Q > \frac{1}{2}$)

- $\forall t > 0, X(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
- Détermination des deux constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} X(t=0) = X_0 \\ \dot{X}(t=0) = 0 \end{cases} \text{ avec}$$

$$\forall t > 0, \dot{X}(t) = \frac{-1}{\tau} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-t/\tau} + (-A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t)) e^{-t/\tau}.$$

Il vient alors le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} A = X_0 \\ -\frac{A}{\tau} + B \omega = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} A = X_0 \\ B = \frac{X_0}{\omega \tau} \end{cases}.$$

- Démonstration de l'équivalence des deux écritures :
 $\forall t > 0, X(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-t/\tau} \Leftrightarrow \forall t > 0, X(t) = (C \cos(\omega t + \varphi)) e^{-t/\tau}$ où (A, B) ou (C, φ) sont les deux constantes d'intégration.

On utilise la relation trigonométrique $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$:

$$\forall t > 0, C \cos(\omega t + \varphi) = C \cos(\varphi) \cos(\omega t) - C \sin(\varphi) \sin(\omega t) \text{ donc}$$

$$\forall t > 0, C \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \text{ avec } \begin{cases} A = C \cos(\varphi) & (1) \\ B = -C \sin(\varphi) & (2) \end{cases}.$$

Si, au contraire, on veut exprimer (C, φ) connaissant (A, B) :

$$\begin{matrix} (1) \\ (2)/(1) \end{matrix} \begin{cases} C = \frac{A}{\cos(\varphi)} \\ \tan(\varphi) = -\frac{B}{A} \end{cases}$$

- Représentation graphique :

Courbes obtenues sous Maple pour $X_0 = 1\text{m}$, $\dot{X}(t=0) = 0$, $Q = 5$ et $\omega_0 = 1\text{rad.s}^{-1}$

