ATS

Jules Ferry

Chapitre 4 : Oscillateurs mécaniques libres à un degré de liberté

M4

I. Oscillateur harmonique libre à un degré de liberté (OH 1DL)

1. Définition (ou équation du mouvement)

On appelle oscillateur harmonique libre à un degré de liberté tout système dont l'évolution temporelle de la position $x(t)$ est régie par l'équation différentielle $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x(t)=\omega_0^2 x_{eq}}$.
ω_0 (en $rad.s^{-1}$) est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique et x_{eq} est sa position d'équilibre stable.

<u>Remarque</u> : on peut toujours réaliser un changement de variable $X(t)=x(t)-x_{eq}$ dont l'évolution temporelle sera régie par $\ddot{X}+\omega_0^2 X(t)=0$.

2. Mouvement de l'oscillateur harmonique (résolution : cours de maths par cœur !)

$\ddot{X}+\omega_0^2 X(t)=0$: équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2+\omega_0^2=0$. Les racines sont évidentes : $r=\pm i\omega_0$ (avec $i^2=-1$) donc :

$$\boxed{\begin{gathered} X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t) \\ X(t)=X_m\cos(\omega_0 t+\phi) \end{gathered}}$$

Les 2 constantes à déterminer (A,B) ou (X_m, φ) s'obtiennent à l'aide des conditions initiales car $X(t)$ et $\dot{X}(t)$ sont continues.

3. Aspect énergétique (illustration sur le pendule élastique horizontal)

$X(t)=X_m\cos(\omega_0 t+\phi)$ avec $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ dans le cas du pendule élastique.

$E_m(t)=E_c(t)+E_p(t)$.

$E_p(t)=\frac{1}{2}kX^2(t)=\frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)$.

$E_c(t)=\frac{1}{2}m\dot{X}^2(t)=\frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\phi)=\frac{1}{2}kX_m^2\sin^2(\omega_0 t+\phi)$.

Il vient alors $E_m(t)=\frac{1}{2}kX_m^2=cte$: **le système est conservatif ! (pas de frottements donc pas de perte d'énergie).**

II. Oscillateur libre à un degré de liberté amorti

1. Définition (ou équation du mouvement)

Tout système dont l'évolution temporelle de la position $x(t)$ est régie par l'équation différentielle $\boxed{\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x(t)=\omega_0^2 x_{eq}}$ où

- **ω_0 (en $rad.s^{-1}$) est la pulsation propre du système**
- **Q (sans unité) est le facteur de qualité du système ; $\boxed{\xi=\frac{1}{2Q}}$ (sans unité) est le facteur d'amortissement du système (représente les frottements fluides : force non conservative) ; il est souvent noté m en SII.**
- **x_{eq} est la position d'équilibre stable du système.**

<u>Remarque</u> *: on peut toujours réaliser un changement de variable* $X(t)=x(t)-x_{eq}$ *dont l'évolution temporelle sera régie par* $\ddot{X}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{X}+\omega_0^2 X(t)=0$.

2. Résolution (cours de maths à savoir par cœur !!!)

$\ddot{X}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{X}+\omega_0^2 X(t)=0$: équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant d'**équation caractéristique** $\boldsymbol{r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0}$ dont le discriminant est $\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$.

Il existe alors 3 types de régimes transitoires possibles :

- $\boldsymbol{\Delta>0}$: régime apériodique $\left(Q<\frac{1}{2}\right)$

  $r_{1/2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\omega_0\sqrt{\left(\frac{1}{4Q^2}-1\right)}$ toutes deux négatives et $\boxed{X(t)=A e^{r_1 t}+B e^{r_2 t}}$;

- $\boldsymbol{\Delta=0}$: régime critique $\left(Q=\frac{1}{2}\right)$

  $r_d=-\omega_0$ et $\boxed{X(t)=(At+B)e^{r_d t}}$ donc $X(t)=(At+B)e^{-\omega_0 t}$;

- $\boldsymbol{\Delta<0}$: régime pseudo-périodique $\left(Q>\frac{1}{2}\right)$

  $r_{1/2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm i\,\omega_0\sqrt{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}$ et $\boxed{X(t)=\left[A\cos\left(\Im(r_{1/2})t\right)+B\sin\left(\Im(r_{1/2})t\right)\right]e^{\Re(r_{1/2})t}}$ donc

  $X(t)=\left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right]e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$.

Il restera 2 constantes d'intégration (A,B) à déterminer à partir des conditions initiales car $X(t)$ et $\dot{X}(t)$ sont continues.

3. Régime apériodique $\Delta \geqslant 0$ (ou $Q \leqslant \frac{1}{2}$)

Le **régime critique** n'est qu'un cas particulier du régime apériodique : c'est **le plus rapide des régimes apériodiques.**

Le système atteint sa position d'équilibre stable directement ou après être passé par une position extrême (selon les conditions initiales).

4. Régime pseudo-périodique $\Delta < 0$ (ou $Q > \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} X(t) &= \left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right] e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \\ &= C\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t+\phi\right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \end{aligned}$$

, il y a deux parties dans cette solution :

- oscillations à la **pseudo-pulsation** $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ et de **pseudo-période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$;
- décroissance exponentielle de l'amplitude avec une constante de temps $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Remarque : si $Q \to \infty$ (et donc les frottements s'annulent) alors on retrouve l'oscillateur harmonique.

III. Portrait de phase d'un oscillateur

1. Définitions

L'état d'un système à **un degré de liberté** (paramètre $X(t)$) peut être représenté, à tout instant, par un point de coordonnées $\left(\boldsymbol{X(t)}, \boldsymbol{\dot{X}(t)}\right)$ (ou $\left(x(t), \dot{x}(t)\right)$ avec $X(t)=x(t)-x_{eq}$) dans un plan appelé **plan de phase**.
La courbe obtenue dans le plan de phase est appelée **trajectoire de phase** du système (elle dépend des conditions initiales).
L'ensemble de toutes les trajectoires de phase possibles (chacune correspondant à des conditions initiales données) constitue le portrait de phase du système.

2. Propriétés générales d'un portrait de phase

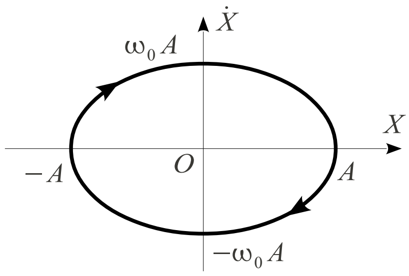
- Deux trajectoires de phase **ne peuvent se croiser** (solution $X(t)$ unique à conditions initiales données).
- Une **trajectoire de phase fermée** correspond à un **mouvement périodique**.
- Une trajectoire de phase est **parcourue dans le sens horaire** (si $\dot{X}>0$: X croît ; si $\dot{X}<0$: X décroît).
- Un point vers lequel tend une trajectoire de phase pour $t \rightarrow \infty$ est appelé **attracteur**.

3. Exemples : portrait de phase d'un OH et d'un oscillateur libre amorti

a) Portrait de phase d'un OH

On a $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ donc $\dot{X}(t)=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t+\varphi)$ avec A (l'amplitude des oscillations), φ (phase à l'origine) déterminées par les conditions initiales (et $X(t)=x(t)-x_{eq}$). On cherche l'équation des trajectoires de phase : $\dot{X}=f(X)$.

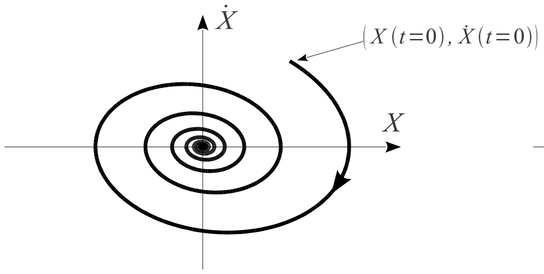
On trouve immédiatement que : $\left(\dfrac{\dot{X}}{\omega_0 A}\right)^2+\left(\dfrac{X}{A}\right)^2=1$.



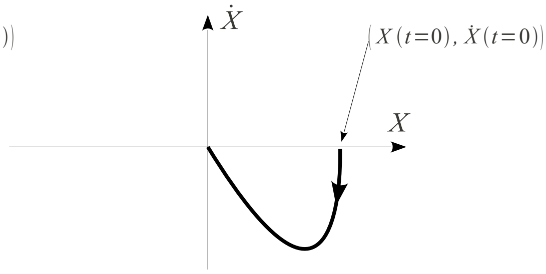
Les trajectoires de phase d'un OH sont donc des ellipses centrées en O (ou en $x=x_{eq}$ si on considère le paramètre $x(t)$).

b) Portrait de phase d'un oscillateur amorti

Dans le cas de l'oscillateur libre amorti, les trajectoires de phase tendent toutes vers le point de coordonnées $(X=0, \dot{X}=0)$ (ou $(x=x_{eq}, \dot{x}=0)$) : ce point est un **attracteur**.



Cas du régime pseudo-périodique



Cas du régime apériodique