

Introduction : on étudie des EDL (on se restreint, dans le programme d'ATS, aux EDL du second ordre mais tout peut être utilisé avec des EDL du premier ordre) du type : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e(t)$ avec $e(t) = E \cos(\omega t)$ est appelée **excitation sinusoïdale**.

On cherche le **régime permanent** qu'on appelle **régime sinusoïdal forcé (RSF)**.

I. Du régime transitoire au régime permanent

Solution générale de l'équation différentielle : $x(t) = x_{EH}(t) + x_{part}(t)$.

- $x_{EH}(t) = x_{libre}(t)$ représente le régime libre (i.e. sans second membre) et a déjà été étudié en M4 :
 - il dépend des conditions initiales (CI) ;
 - $x_{libre}(t) \xrightarrow[t > 3\tau]{t \rightarrow \infty} 0$.
- $x_{part}(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle complète :
 - ne dépend pas des CI ;
 - **de la même forme que l'excitation** donc ici $x_{part}(t) = X \cos(\omega t + \phi)$.

On distingue alors deux régimes :

- le **régime transitoire** où $x(t) = x_{libre}(t) + x_{part}(t)$;
- le **régime permanent** où $t > 3\tau$ donc $x_{libre}(t)$ est négligeable et $x(t) \simeq x_{part}(t)$.

Le régime permanent est donné par $x_{part}(t)$ imposée par l'excitation, c'est pourquoi on parle de régime forcé. Comme la forme de l'excitation est sinusoïdale, on parle alors de **RSF**.

Conclusion : on cherche le RSF $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$: il faut déterminer X et Φ en fonction de E et ω (les caractéristiques de l'oscillateur étant connues : ω_0 et Q).

Attention : ω ne représente pas une pseudo-pulsation dans M5 mais la pulsation imposée par l'excitation !

Remarques :

1. Si $e(t) = E \sin(\omega t)$ alors on cherche $x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$.
2. On peut déterminer X et Φ en remplaçant l'expression $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$ dans l'équation différentielle étudiée ! Après de longs et fastidieux calculs, on obtiendrait les expressions de X et Φ .

II. Méthode complexe (RSF et EL)

On expose dans un premier temps la méthode mathématique la plus simple afin de déterminer X et Φ , la démonstration de la méthode est donnée à la fin de cette partie.

1. Notation complexe des grandeurs sinusoïdales

On associe à chaque grandeur sinusoïdale $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$ une grandeur complexe

$$\underline{x}(t) = X e^{i(\omega t + \phi)} = X e^{i\phi} e^{i\omega t}.$$

On appelle **amplitude complexe** la grandeur $\underline{X} = X e^{i\phi}$; $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{i\omega t}$.

Remarques :

1. Si les calculs sont effectués en complexe sur $\underline{x}(t)$, on revient facilement à la grandeur physique $x(t)$ par $x(t) = \Re(\underline{x}(t))$.
2. L'amplitude de $x(t)$ est $X = |\underline{x}(t)| = |X|$.
3. La phase à l'origine de $x(t)$ est $\phi = \arg(X)$.
4. $e(t) = E \cos(\omega t) \rightarrow \underline{e}(t) = E e^{i\omega t}$.
5. Si $\underline{e}(t) = E \sin(\omega t)$ alors $x(t) = X \sin(\omega t + \phi) = \Im(\underline{x}(t))$.

2. Intérêt de la méthode complexe

$\underline{x}(t) = X e^{i(\omega t + \phi)}$ donc :

- dériver revient à multiplier par $i\omega$: $\frac{d\underline{x}}{dt} = i\omega \underline{x}(t)$;
- intégrer revient à diviser par $i\omega$: $\int \underline{x}(t) dt = \frac{\underline{x}(t)}{i\omega}$.

Conclusion : les EDL deviennent des équations algébriques en complexe !

Exemple : $\ddot{x} + \frac{\omega_0^2}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e(t)$ avec $e(t) = E \cos(\omega t)$.

On étudie le RSF et EL donc on peut utiliser la notation complexe. L'équation différentielle devient pour $\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) \left((i\omega)^2 + i\omega \frac{\omega_0^2}{Q} + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 \underline{e}(t) \text{ soit } X e^{i(\omega t + \phi)} = \frac{\omega_0^2 E e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}} \text{ qui est vraie quelque soit } t \text{ donc :}$$

$$X e^{i\phi} = \frac{\omega_0^2 E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}} \text{ et c'est fini !}$$

3. Pourquoi ça marche ? (démonstration de la méthode HP)

Pourquoi X et Φ trouvés par la méthode complexe seraient bien ceux de $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$?

a) Linéarité d'une équation

Propriété fondamentale d'une EDL (en fait c'est LA définition mathématique d'une équation linéaire) : si la réponse du système à l'excitation $e_1(t)$ est $x_1(t)$ et que la réponse à $e_2(t)$ est $x_2(t)$ alors la réponse du système à $e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$ est $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ où α et β sont des constantes quelconques (réelles ou complexes).

b) Justification de la méthode complexe

En RSF, on cherche la réponse du système à l'excitation :

$$\begin{cases} e_1(t) = E \cos(\omega t) & \text{sous la forme } x_1(t) = X \cos(\omega t + \phi) \\ e_2(t) = E \sin(\omega t) & \text{sous la forme } x_2(t) = X \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

L'équation régissant l'évolution temporelle de $x(t)$ étant linéaire (EDL), on peut dire que la réponse à l'excitation $e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$ est $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$.

Donc en posant $\alpha = 1$ et $\beta = i$, on obtient que la réponse à l'excitation $e(t) = e_1(t) + i e_2(t)$ est $x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$.

Une simple réécriture montre que la réponse à l'excitation $E e^{i\omega t} = e(t)$ est $X e^{i(\omega t + \phi)} = \underline{x}(t)$: X et ϕ trouvés par la méthode complexe correspondent alors de manière naturelle à ceux de $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$.

Remarque : si on cherche $x_1(t)$ alors $x_1(t) = \Re(\underline{x}(t))$; si on cherche $x_2(t)$ alors $x_2(t) = \Im(\underline{x}(t))$.

c) Conclusion importante

On n'utilise la méthode complexe que lorsqu'on a des équations linéaires et qu'on est en RSF !

Attention :

- Si on voit x^2 , $\sqrt{x}$, $x \cdot \frac{dx}{dt}$, ... dans l'équation, on n'utilise surtout pas de complexe !
- C'est le cas pour une puissance qui est par définition non linéaire a priori (multiplication de deux grandeurs physiques). On ne l'étudiera pas en M5, mais on étudiera la puissance électromagnétique en RSF ... Il faudra prendre garde à ne pas parler de puissance complexe ...

III. Intérêt de l'étude en RSF

1. Phénomène de résonance

RSF et EDL donc on peut utiliser la méthode complexe : calculs simples permettant d'étudier le phénomène de résonance.

2. Séries de Fourier

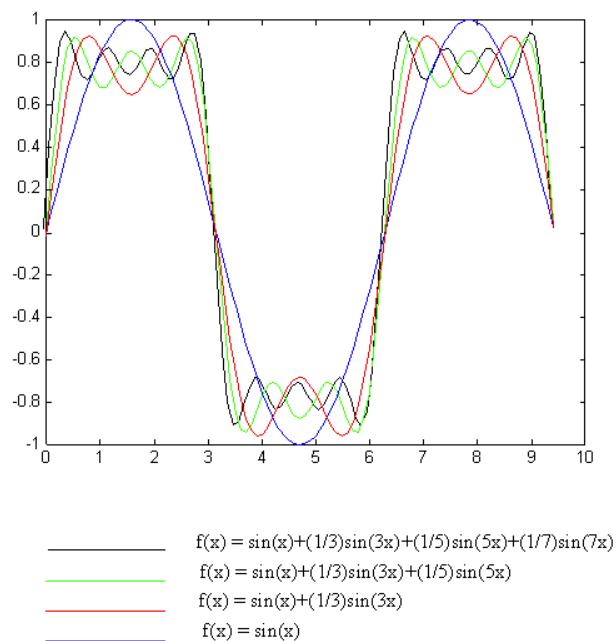
En 1822, alors qu'il étudie la conduction thermique, Joseph Fourier est confronté à une nouvelle équation mathématique (l'équation de la chaleur étudiée en T8) inconnue jusqu'à lors mais heureusement linéaire. Lui vient alors une idée, appelée aujourd'hui séries de Fourier, qui lui permettra de trouver les solutions à cette équation et qui révolutionnera l'analyse mathématique.

Séries de Fourier : toute fonction périodique $e(t)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ peut se mettre sous la forme d'une somme de sinusoides, appelée série de Fourier :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

(où les coefficients a_n , b_n , c_n et ϕ_n sont calculables).

Exemple : la fonction créneau peut être décomposée en somme de sinusoides, ci-contre on en représente 4.



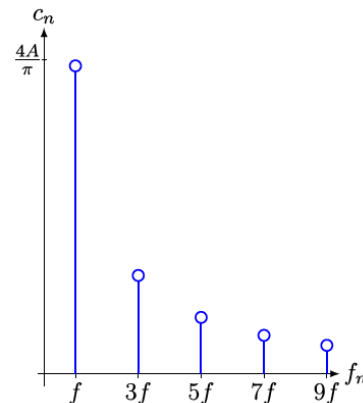
Conclusion : par le RSF, on étudie la réponse à $e(t) = E \cos(\omega t)$ sous la forme $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$; on en déduit X et ϕ en fonction de E et ω donc on connaît la réponse à n'importe quelle excitation sinusoïdale. En utilisant les séries de Fourier et la linéarité de l'EDL, la réponse à une excitation $e(t)$ quelconque périodique devient une simple somme de réponses sinusoïdales forcées connues : **l'étude du RSF permet de connaître la réponse à n'importe quelle excitation périodique (on reste en régime permanent tout de même).**

Exemple : réponse d'un amortisseur à une route sinusoïdale ET aux aspérités du goudron dont on a déjà parlé ! (on parle de filtre mécanique en fréquence ; on verra les filtres électriques en TD et en TP).

Définition : on appelle spectre d'une fonction le graphe donnant l'amplitude des signaux sinusoïdaux qui la composent en fonction des fréquences associées.

Exemple : ci-contre le spectre d'un créneau d'amplitude A et de fréquence f .

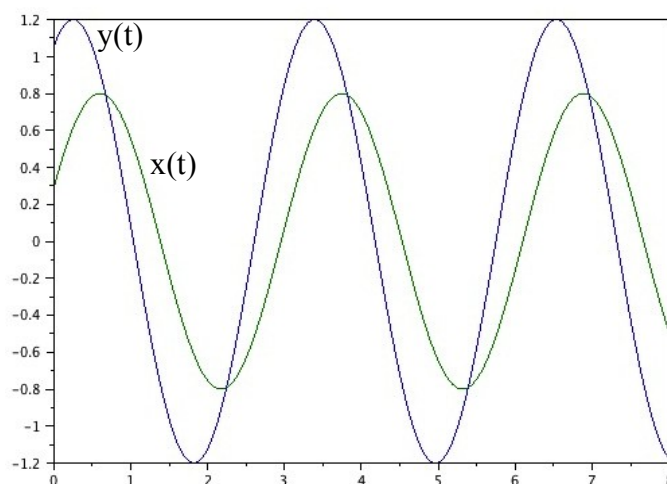
Remarque : la transformée de Laplace vue en SII est en fait une méthode complexe élargie qui permet d'obtenir l'ensemble de la solution (régime transitoire inclus ! d'où e^p au lieu de juste $e^{i\omega}$) pour des excitations quelconques (pas forcément périodiques ! d'où la somme continue au lieu de discrète). Pour ne pas confondre les deux théories mathématiques qui utilisent une méthode complexe pour résoudre les équations linéaires, on utilise des notations différentes : une fonction physique réelle appelée $f(t)$ aura pour fonction associée en complexe $\underline{f}$ en RSF et F en transformée de Laplace.



IV. Différence de phase entre deux signaux synchrones

Deux signaux sont synchrones s'ils sont sinusoïdaux et qu'ils possèdent la même pulsation.

On considère les deux signaux synchrones $x(t) = X \cos(\omega t + \phi_x)$ et $y(t) = Y \cos(\omega t + \phi_y)$:



L'avance de phase de $y(t)$ sur $x(t)$, ou déphasage (ou encore différence de phase) de $y(t)$ par rapport à $x(t)$, est : $\Delta\phi = (\omega t + \phi_y) - (\omega t + \phi_x) = \phi_y - \phi_x = \text{cte}$ telle que $\Delta\phi \in [-\pi; \pi]$.

Mesure à partir d'un graphe :

- en t_x , $\omega t_x + \phi_x = 0$ donc $\phi_x = -\omega t_x$;
- en t_y , $\omega t_y + \phi_y = 0$ donc $\phi_y = -\omega t_y$;

d'où $|\Delta\phi| = \omega |t_x - t_y| = \omega \Delta t = \frac{2\pi \Delta t}{T}$ avec $\Delta\phi \in [-\pi; \pi]$ il faut alors savoir déterminer le signe par simple lecture du graphe.

Terminologie :

- si $\Delta\phi = 0$ alors on dit que les 2 signaux sont en phase ;
- si $\Delta\phi = +\frac{\pi}{2}$ alors on dit que $y(t)$ est en quadrature avance sur $x(t)$;
- si $\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$ alors on dit que $y(t)$ est en quadrature retard sur $x(t)$;
- si $\Delta\phi = \pm\pi$ alors on dit que les deux signaux sont en opposition de phase.