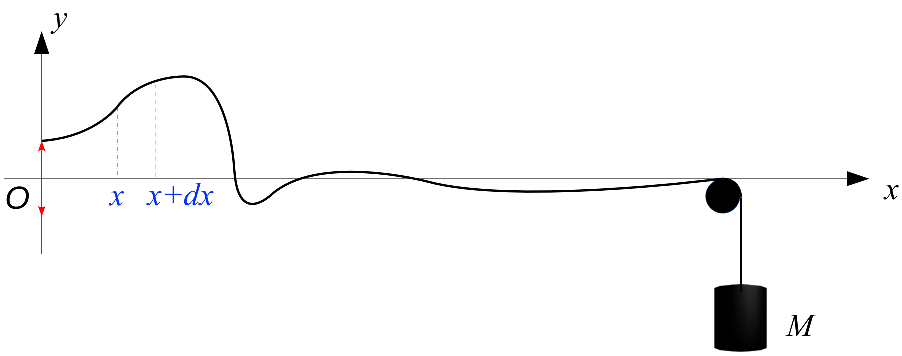
Chapitre 6 : Onde mécanique transversale

I. Équation de propagation sur une corde

1. Présentation et hypothèses

On considère une corde tendue (par exemple par un système masse M + poulie à une extrémité), de masse linéique μ (en $\mathrm{kg.m^{-1}}$), excitée de manière transversale à l'autre extrémité (par opposition à une excitation longitudinale, non étudiée en ATS).
Pour les simulations, nous utiliserons le lien suivant :
https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_en.html

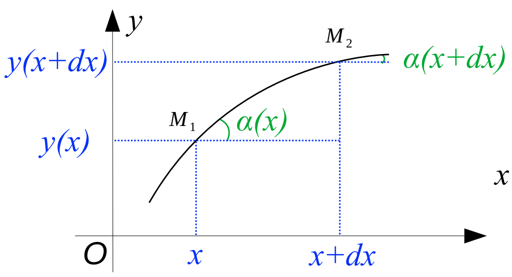


Hypothèses :

1. Les frottements sont négligés.
2. Le poids de la corde est négligé (devant la tension appliquée à la corde). La corde au repos est donc horizontale.
3. La tension appliquée à l'extrémité de la corde est constante, notée T ($=Mg$).
4. La corde est sans raideur : $\vec{T}$ est tangente à la corde en tout point.
5. La corde est inextensible (par opposition à « élastique ») et reste aux faibles déformations :
   - chaque point M de la corde a un déplacement vertical uniquement, noté $y(x,t)$;
   - $\alpha(x,t) \ll 1$ donc par un DL à l'ordre 1 : $\begin{cases} \sin\alpha \simeq \alpha \\ \cos\alpha \simeq 1 \\ \tan\alpha \simeq \alpha \end{cases}$.

   Propriété mathématique :
   $$\tan(\alpha(x,t)) = \frac{y(x+dx,t) - y(x,t)}{(x+dx)-x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t \ !$$
   On retient donc pour la suite : $\boxed{\alpha(x,t) \simeq \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t}$.

à l'instant t :



2. Équation de propagation

L'évolution spatio-temporelle de la déformation de la corde $y(x,t)$, appelée onde mécanique transverse, est régie, dans un <u>référentiel galiléen</u>, par l'<u>équation de propagation</u> :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \underset{(I)}{=} 0 \quad \text{avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Remarque : il s'agit de la forme canonique d'une équation de propagation suivant (Ox) ; c est la vitesse de propagation de l'onde (il faut savoir vérifier l'homogénéité de cette équation (I) en retrouvant c en $\mathrm{m.s^{-1}}$).

Propriétés :

1. **Il s'agit d'une équation différentielle <u>linéaire</u> aux dérivées partielles ($y(x,t)$) à coefficient constant.** On verra plus tard l'importance de la linéarité de cette équation (comme en M5).
2. **Cette équation est renversable dans le temps !**

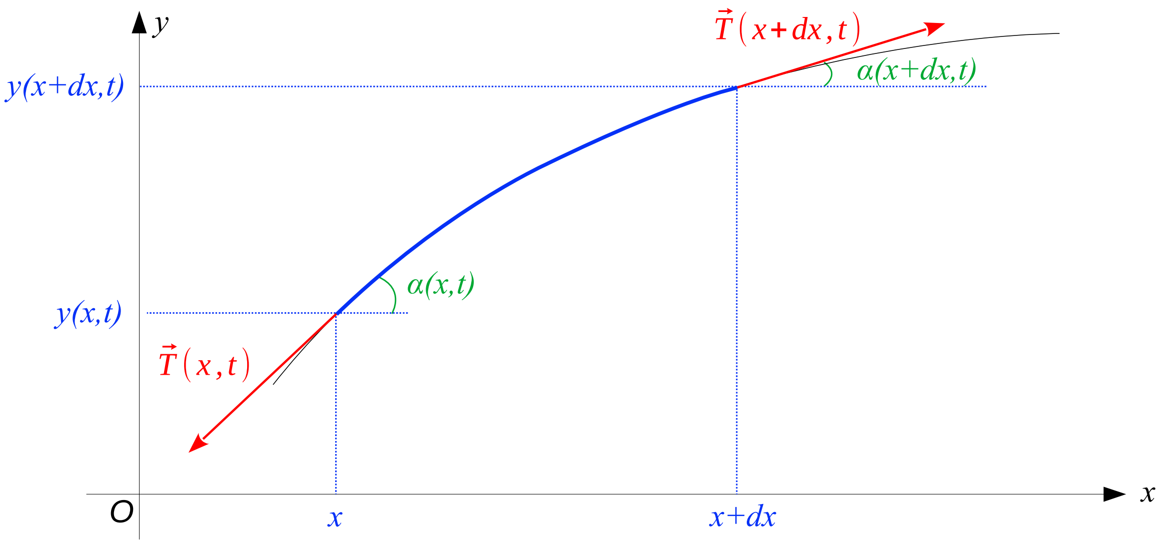
   Si on remplace $t \to -t$ dans (I) alors on obtient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right) = 0$: inchangée !

<u>Signification physique de la deuxième propriété</u> : se passer le film de l'évolution temporelle de la déformation de la corde en sens inverse n'est pas choquant : il y aurait une réalité physique simple à cette observation (il suffit d'inverser les conditions aux limites données aux extrémités). Cette propriété physique provient du fait que l'on a négligé les frottements : il s'agit d'un processus réversible au sens thermodynamique.

*<u>Remarque</u> : lorsque l'onde peut se propager suivant les différentes directions de l'espace (pas que (Ox) ; par exemple pour une onde sonore) alors l'équation de propagation prend la forme $\Delta f(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ appelée **<u>équation de d'Alembert</u>** où f est la grandeur physique caractérisant l'onde étudiée (souvent appelée signal) et Δ est un opérateur appelé Laplacien (cf EM5).*

3. Démonstration à connaître

On applique la deuxième loi de Newton au bout de corde compris entre x et $x+dx$, à l'instant t, dans le référentiel du labo supposé galiléen :



$$m_{bc}\vec{a}_{bc}(x,t) = \vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t) \text{ avec } \begin{cases} m_{bc} = \mu\, dl_x \simeq \mu\, dx \text{ car corde inextensible aux faibles déformations} \\ \vec{a}_{bc} \simeq \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_x \vec{u}_y \text{ car uniquement déplacement vertical} \end{cases} ;$$

on obtient donc $\mu\, dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_x \vec{u}_y = \vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t)$.

- <u>Projection suivant $\vec{u}_x$</u> :
  $0 = T(x+dx,t)\cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)\cos(\alpha(x,t))$ avec $\cos\alpha \simeq 1$
  donc $\boxed{T(x+dx,t) = T(x,t) = T = cte}$: pas dévolution spatiale de la norme de la tension sur la corde (et donc pas d'évolution temporelle).

- Projection suivant $\vec{u}_y$:

$$\mu\, dx\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)=T\sin(\alpha(x+dx,t))-T\sin(\alpha(x,t)) \text{ avec } \sin\alpha\simeq\alpha$$
$$\simeq T\,(\alpha(x+dx,t)-\alpha(x,t))$$

donc $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\left(\frac{\alpha(x+dx,t)-\alpha(x,t)}{dx}\right)$ soit $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial \alpha}{\partial x}$.

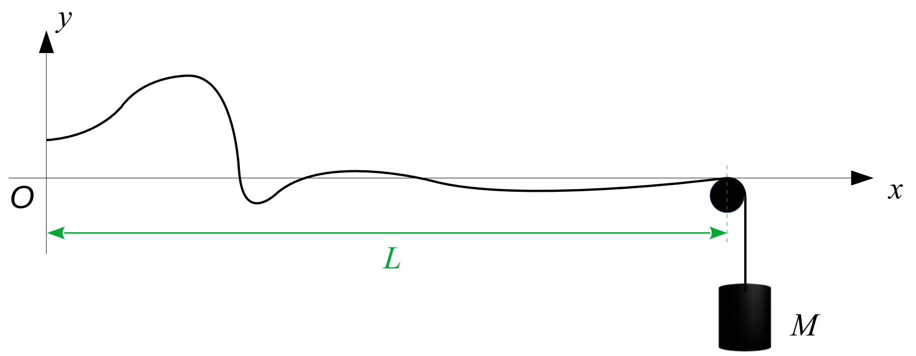
Avec $\alpha\simeq\frac{\partial y}{\partial x}$, il vient $\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ d'où $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0}$.

- Par identification à la forme canonique d'une équation de propagation, $\boxed{c=\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$.

4. **Conditions aux limites** ($\Leftrightarrow$ des conditions initiales mais sur la variable spatiale)

S'il y a un obstacle fixe en $x=L$: $\boxed{\forall t, y(x=L,t)=0}$.

Exemple : le schéma initial en supposant que la poulie est située en $x=L$.

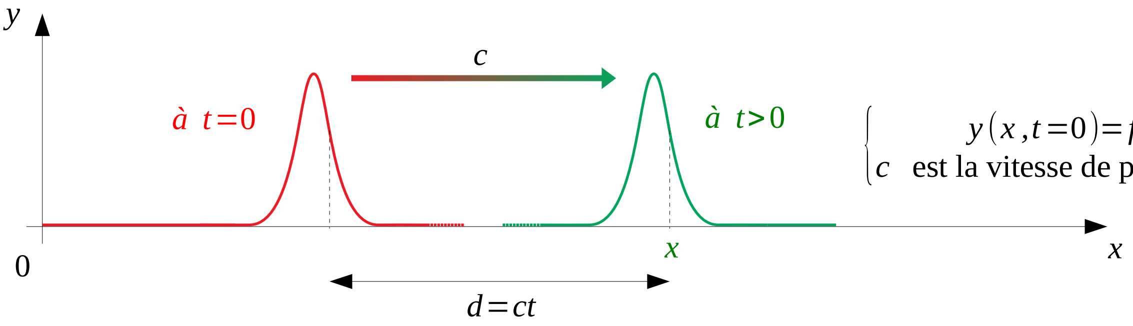


Par la suite, on cherche la forme générale des solutions $y(x,t)$ de l'équation de propagation (I).

II. Onde progressive

Lorsque la taille caractéristique du milieu de propagation est très supérieure à la longueur d'onde de l'onde, le milieu peut être considéré comme infini. L'onde peut alors se propager dans le milieu sans subir de réflexion ou d'atténuation de la part des bords du milieu (on dit que les effets de bord sont négligeables).
L'onde est dite progressive.

1. Évolution de la déformation de la corde à différents instants



$$\begin{cases} y(x,t=0)=f(x) & \text{en rouge connue} \\ c & \text{est la vitesse de propagation de la déformation} \end{cases}$$

On veut connaître la déformation $y(x,t)$ de la corde à t quelconque (en vert), pour une propagation suivant $+\vec{u}_x$, en négligeant les frottements :

$y(x,t)=y(x-d,t=0)$ où $d=ct$;

soit $y(x,t)=y(x-ct,t=0)=f(x-ct)$.

<u>Définition</u> : une onde définie par $\boxed{y(x,t)=f(x-ct)}$ (respectivement $y(x,t)=f(x+ct)$) est une <u>onde progressive</u> qui se propage selon $\boxed{+\vec{u}_x}$ (respectivement $-\vec{u}_x$) à la vitesse c.

<u>Remarque mathématique</u> : toute fonction mathématique $f(x\pm ct)$ peut se réécrire sous la forme d'une fonction $h(a(x\pm ct))$ où a est un coefficient quelconque.
Par exemple, prenons $a=\frac{1}{c}$, on obtient $h\left(\frac{x}{c}\pm t\right)$ qui reste une onde progressive.
Le sens de propagation se retrouve alors simplement en comparant les signes des coefficients devant les variables x et t. S'ils sont de signes opposés, la propagation se fait suivant $+\vec{u}_x$; s'ils sont de même signe, la propagation se fait suivant $-\vec{u}_x$.

<u>Remarque</u> : vérifions que cette onde $y(x,t)=f(x-ct)$ est bien solution de l'équation de propagation :
$\frac{\partial f}{\partial x}=f'(x-ct)$; $\frac{\partial f}{\partial t}=-c.f'(x-ct)$ *(il faut voir une composée de fonctions $f(u)$ avec $u=x-ct$).*
Donc $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$ *devient* $f''(x-ct)-\frac{\mu}{T}.c^2.f''(x-ct)=0$ *vraie* $\forall(x,t)$.
Soit $\frac{\mu}{T}.c^2=1$ *d'où* $\boxed{c=\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$ *!*
On vient de démontrer que le coefficient apparaissant dans (I) est bien $\frac{1}{c^2}$ où c est la vitesse de propagation de l'onde !

2. Solution générale de l'équation de propagation

L'équation de propagation étant linéaire, <u>la forme générale des solutions</u> de l'équation de propagation est $\boxed{y(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)}$: superposition de 2 ondes progressives l'une suivant $+\vec{u}_x$, l'autre suivant $-\vec{u}_x$.

3. Onde progressive sinusoïdale (ou harmonique ou monochromatique OPM)

On se place dans le cas très particulier où la déformation initiale est sinusoïdale pure $y(x,t=0)=f(x)=A\cos(kx-\phi)$ et se propage suivant $+\vec{u}_x$.

a) Expression de la déformation

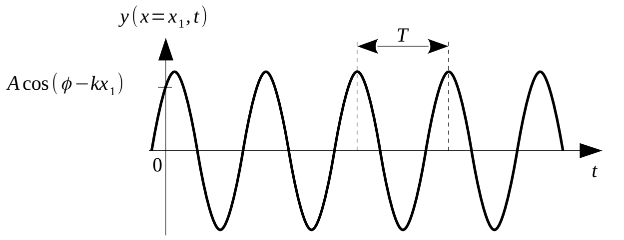
$$\begin{aligned} y(x,t)&=f(x-ct)=A\cos(k(x-ct)-\phi)\\ &=A\cos(kx-kct-\phi)\\ &=A\cos(kct-kx+\phi) \text{ ; on pose alors } \omega=kc \text{ !}\\ &=A\cos(\omega t-kx+\phi) \text{ avec } \omega=kc. \end{aligned}$$

Définitions : une onde définie par $\boxed{y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\phi)}$ (respectivement $y(x,t)=A\cos(\omega t+kx+\phi)$) est une onde progressive sinusoïdale qui se propage selon $\boxed{+\vec{u}_x}$ (respectivement $-\vec{u}_x$) à la vitesse c ; avec $\boxed{k=\frac{\omega}{c}}$ est appelée pulsation spatiale, s'exprime en $rad.s^{-1}$.
On appelle vecteur d'onde $\vec{k}=+k\vec{u}_x$ (respectivement $\vec{k}=-k\vec{u}_x$) : même direction et sens que la propagation de l'onde.

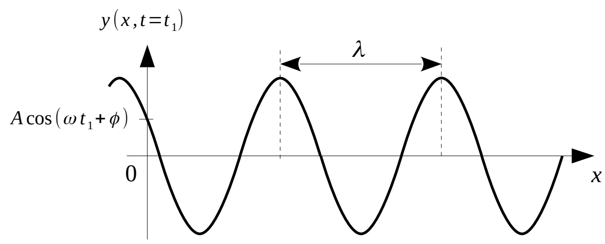
b) Double périodicité

On peut représenter graphiquement l'onde $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\phi)$ de deux manières :

- temporellement au niveau du capteur placé en $x=x_1$: on observe alors une périodicité temporelle
  - de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$, en s ;
  - de fréquence $f=\frac{1}{T}$, en Hz (nombre de période par seconde) ;
  - de pulsation (temporelle) ω, en $rad.s^{-1}$.



- spatialement sur une photo prise à l'instant $t=t_1$: on observe alors une périodicité spatiale
  - de période spatiale $\lambda=\frac{2\pi}{k}$, en m, appelée **longueur d'onde** ;
  - *de fréquence spatiale $\sigma=\frac{1}{\lambda}$, en m^{-1}, appelé « nombre d'onde » (peu utilisé, représente le nombre de longueur d'onde par mètre) ;*
  - de pulsation spatiale λ, en $rad.m^{-1}$.



Conclusion :

Propriété : une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité :

- **spatiale $\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{k}}$, appelée longueur d'onde**
- **temporelle $T=\frac{2\pi}{\omega}$**

Ces deux périodicités sont liées par la relation de dispersion $\boxed{\omega=kc}$.

<u>Remarque</u> : la relation de dispersion peut se réécrire sous la forme : $\boxed{c=}\frac{\omega}{k}=\frac{2\pi}{T}.\frac{\lambda}{2\pi}\boxed{=\frac{\lambda}{T}}=\lambda.f$ *(logique et déjà vue au lycée). Cette relation signifie que l'onde progresse de la distance* λ *pendant la durée* T *.*

4. Discussion sur la linéarité de l'équation de propagation (cf M5)

a) Analyse de Fourier

Par analyse de Fourier, $f(x-ct)$ peut s'écrire comme une somme d'onde progressive sinusoïdales se propageant suivant $+\vec{u}_x$, dont les propagations sont indépendantes les unes des autres par linéarité de l'équation de propagation !
<u>L'étude d'UNE onde progressive sinusoïdale</u> permet donc de comprendre la propagation de <u>$f(x-ct)$ quelconque</u> grâce à l'analyse de Fourier : c'est tout l'intérêt de l'études des OPM.

<u>Remarques</u> :

1. *Idem pour* $g(x+ct)=\Sigma OPM(-\vec{u}_x)$ *par analyse de Fourier.*
2. *Il en résulte que les solutions générales de* (I) *peuvent être vues comme* $\Sigma OPM(+\vec{u}_x)+\Sigma OPM(-\vec{u}_x)$ *.*

b) Notation complexe

On vient de comprendre l'intérêt de l'OPM … qui n'est qu'un RSF !

<u>RSF</u> + ED<u>L</u> $\Rightarrow$ notation $\mathbb{C}$ si on veut :

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\phi)\underset{\mathbb{C}}{\rightarrow}\underline{y}=A\,e^{i(\omega t-kx+\phi)}$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}\underset{\mathbb{C}}{\rightarrow}i\omega.\underline{y}$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}\underset{\mathbb{C}}{\rightarrow}-ik.\underline{y}\ \text{(car } +\vec{u}_x\text{)}$$

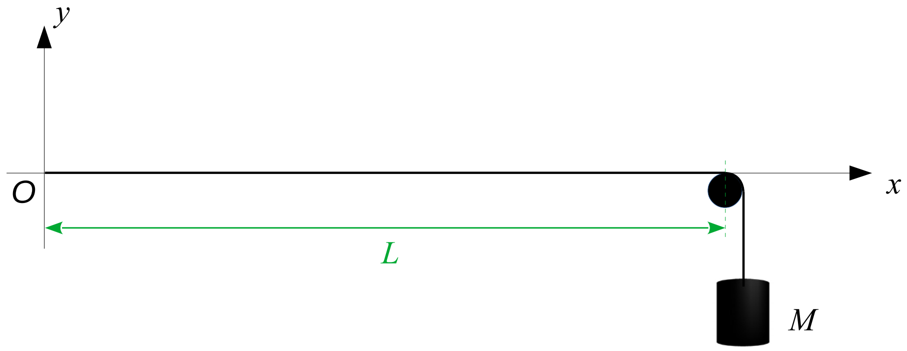
Équation de propagation $\underline{(I)}$: $\frac{\partial^2\underline{y}}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{y}}{\partial t^2}=0$ soit $-k^2.\underline{y}+\frac{1}{c^2}\omega^2.\underline{y}=0$ d'où $\omega=k.c$: on vient de démontrer que l'OPH est bien solution de (I) à condition que la relation de dispersion soit vérifiée !

<u>Remarque</u> : les calculs ne sont pas forcément beaucoup plus simples en complexe pour l'étude d'une OPM (contrairement à l'étude de la résonance en M5) donc on utilise parfois la notation complexe pour cette étude et parfois non …

III. Ondes stationnaires

1. Situation physique (cf TPT3)

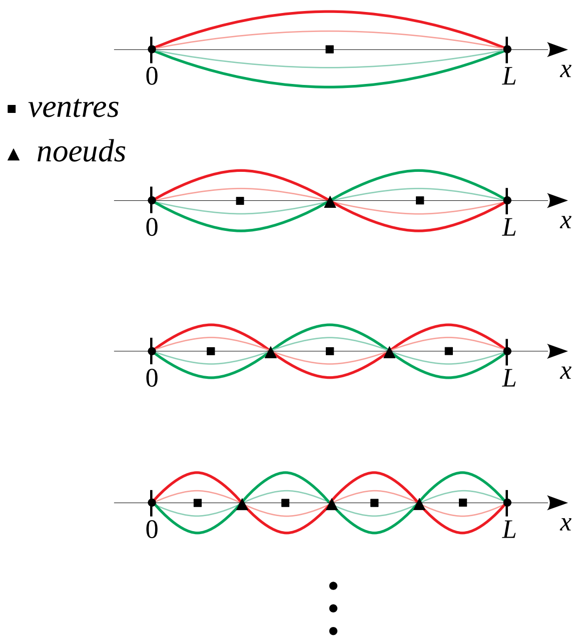
On considère une corde fixée à ses 2 extrémités (la longueur L de la corde n'est donc plus considérée infinie) et on l'excite « comme on peut » de manière sinusoïdale (en général, on place un vibreur sinusoïdal situé en $x=0$, de très faible amplitude).



Observations expérimentales :

- Pour des fréquences quelconques d'excitation, on observe des « OPM » qui se réfléchissent aux extrémités et s'additionnent sur leurs passages. On constate une forme non sinusoïdale de la corde qui évolue au cours du temps de faible amplitude : si l'on se recule un peu, la corde semble horizontale, immobile.
- **Pour des fréquences d'excitation particulières, la géométrie de la corde est sinusoïdale : elle possède <u>des nœuds et des ventres dont la position suivant (Ox) est fixe</u> : on parle d'<u>onde stationnaire</u> (OS).**
  https://www.youtube.com/watch?v=BSIw5SgUirg

2. Modes propres d'une Onde Stationnaire



$\lambda_1=2L$ mode propre 1 : $\begin{cases} 1 \text{ ventre} \\ 0 \text{ noeud} \end{cases}$

$\lambda_2=L$ mode propre 2 : $\begin{cases} 2 \text{ ventres} \\ 1 \text{ noeud} \end{cases}$

$\lambda_3=\dfrac{2L}{3}$ mode propre 3 : $\begin{cases} 3 \text{ ventres} \\ 2 \text{ noeuds} \end{cases}$

$\lambda_4=\dfrac{L}{2}$ mode propre 4 : $\begin{cases} 4 \text{ ventres} \\ 3 \text{ noeuds} \end{cases}$

<u>Propriété</u> : le $n^{ème}$ mode propre possède $\begin{cases} n \text{ ventres} \\ n-1 \text{ noeuds (sans compter les bords)} \end{cases}$ et $\lambda_n=\dfrac{2L}{n}$

On obtient alors les fréquences de ces différents modes propres par la relation de dispersion $c=\lambda.f$: $\boxed{f_n=n.\dfrac{c}{2L}}$, appelées fréquences propres.

Remarques :

1. *Il s'agit d'un phénomène de résonance qui se produit au sein de la « cavité » de longueur L. On parle de* ***cavité résonante****.*
2. *La longueur L de la cavité est finie ⇒ quantification de λ et de f.*
3. *Si* $L \to \infty$, $\frac{c}{2L} \to 0$ *donc* f *n'est plus quantifiée : toutes les fréquences peuvent exister.*
   En effet, on démontrera au chapitre EM6 que l'onde stationnaire est créée par la première réflexion mais que la quantification des f_n *est engendrée par la seconde réflexion.*

3. Spectre d'une vibration quelconque de la corde

Propriété : le spectre d'une vibration quelconque de la corde est constitué uniquement des fréquences propres.

Remarques :

1. *C'est la principe de fonctionnement d'une guitare :*
   - *la note jouée est définie par la fréquence du fondamental* $f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ *(accordée par réglage de la tension de la corde) ;*
   - *le spectre des harmoniques définit le « timbre » de la note, caractéristique de l'instrument utilisé.*
2. *En général, les harmoniques élevées disparaissent (en amplitude) très vite à cause des frottements.*

4. Lien avec les ondes progressives sinusoïdales OPM (cf EM6)

On considère 2 ondes progressives sinusoïdales, de même amplitude $\frac{A}{2}$, même pulsation ω et se propageant en sens inverse (réflexion sur une extrémité de la corde) :

$y(x,t) = \frac{A}{2}\cos(\omega t - kx + \phi - \psi) + \frac{A}{2}\cos(\omega t + kx + \phi + \psi)$ avec $\omega = kc$ (relation de dispersion).

Relation trigonométrique : $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Il vient alors $y(x,t) = A\cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \psi)$: il s'agit d'une onde stationnaire !

Conclusion : les ondes stationnaires sont le résultat de la superposition de l'OPM incidente et de l'OPM réfléchie.

Définitions : une onde définie par $\boxed{y(x,t) = A\cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \psi)}$ est une onde stationnaire où sa pulsation temporelle ω et sa pulsation spatiale k sont liées par la relation de dispersion $\boxed{\omega = kc}$.

Remarque : utilisation des conditions aux limites (toujours cf EM6)

- $\forall t, y(x=0,t) = 0$ *donc* $\cos(\psi) = 0$ *soit* $\psi = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *d'où* $\cos(kx + \psi) = \pm\sin(kx)$;
  $y(x,t) = \pm A\cos(\omega t + \phi)\sin(kx)$.
- $\forall t, y(x=L,t) = 0$ *donc* $\sin(kL) = 0$ *soit* $kL = 0\ [\pi]$ *mathématiquement.*
  Physiquement, k et L sont strictement positives et L est fixée donc on obtient $k_n L = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$
  soit $k_n = \frac{n\pi}{L}$ *avec* $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ *d'où* $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$.