Partie 3 : Mécanique des fluides

MF1 : Statique des fluides dans le champ de pesanteur

<u>Introduction</u> : on étudie l'évolution spatiale du champ de pression dans un fluide, soumis à un champ de pesanteur uniforme, en équilibre dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

<u>Aparté sur les notations du chapitre</u> :

- *pour les démonstrations, le poids d'une particule fluide interviendra souvent. Pour éviter les confusions, la pression, dans ce chapitre, sera notée p (au lieu de P) et le poids sera noté $\vec{P}$;*
- *la masse volumique du fluide est parfois notée ρ, parfois μ. Dans ce chapitre, on choisit cette dernière notation (afin d'éviter les confusions entre p et ρ).*

I. Modèle du fluide continu au repos (rappels *T0* & *T1*)

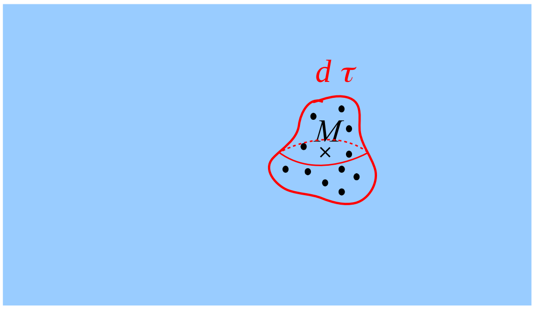
1. Définition d'un fluide

Un fluide est un ensemble d'entités microscopiques (atomes, molécules) occupant un certain volume V dont la géométrie s'adapte aux contraintes extérieurs (les parois par exemple).

- Liquide : possède un volume propre, dense, quasi-incompressible ;
- Gaz : occupe tout le volume disponible, peu dense, compressible.

<u>OdG</u> : $\mu_{liq} \# 10^3 kg.m^{-3}$; $\mu_{gaz} \# 1 kg.m^{-3}$ à température et pression ambiantes … à calculer avec $pV = nRT$ pour plus de précisions.

2. Notion de particule fluide (modèle continu)



$d\tau$ est un élément de volume mésoscopique (*cf T0*) :

$$d\tau \begin{cases} \ll \textit{volume total du fluide} \\ \gg \textit{volume d'une molécule} \end{cases}.$$

Au sein du volume mésoscopique $d\tau$, la matière reste continue : on peut définir des grandeurs intensives locales comme $\mu(M)$, $p(M)$, $T(M)$.

Une particule fluide est l'ensemble des entités microscopiques appartenant au volume mésoscopique $d\tau$.

<u>Remarque</u> :

- *pour un gaz, $d\tau \# 1 mm^3$ (cf T0) ;*
- *pour un liquide, $d\tau \# 1 \mu m^3$ (la taille d'une molécule étant de l'ordre de $10^{-9} m$).*

3. Fluide au repos (à l'équilibre)

Le fluide étant au repos, il n'y a pas de mouvement d'ensemble du fluide : $\vec{v}(M)\left(=\langle\vec{v}_i\rangle_{d\tau}\right)=\vec{0}$.

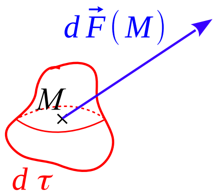
On étudie donc la <u>statique des fluides</u> : les variables d'état sont constante dans le temps.

II. Relation fondamentale de la statique des fluides (RFSF)

1. Forces appliquées à une particule fluide

a) Forces volumiques

On s'intéresse aux forces d'interaction à longue portée (la force gravitationnelle par exemple) :



$d\vec{F}(M)=$ force à distance appliquée à la particule fluide étudiée de volume $d\tau$.

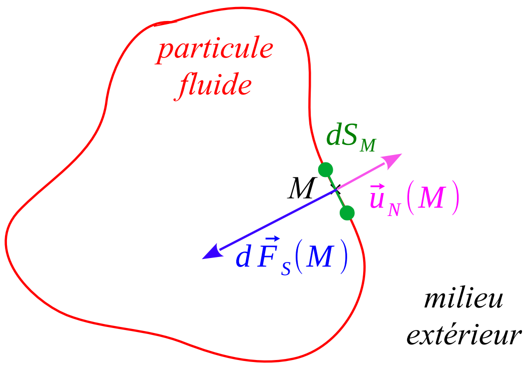
<u>Définition</u> : on appelle force volumique (ou densité volumique de force) $\boxed{\vec{f}_v(M)=\dfrac{d\vec{F}(M)}{d\tau}}$ **en** $N.m^{-3}$ **.**

Nous ne considérons, par la suite, que l'effet du champ de pesanteur $\vec{g}$: $dF(M)=dm.\vec{g}(M)=\mu(M)\vec{g}(M)d\tau$, d'où la **<u>force volumique de pesanteur</u>** $\boxed{\vec{f}_v(pesanteur)=\mu(M)\vec{g}(M)}$

masse de la particule fluide

b) Forces surfaciques

On s'intéresse aux forces d'interaction à courte portée : les forces de contact.



Le milieu extérieur peut être :

- une paroi (surface réelle) ;
- autre fluide non miscible (interface) ;
- autre particule fluide (surface fictive).

La force de contact exercée par le milieu extérieur sur le fluide en M = force pressante en M = $d\vec{F}_{dS}(M)$.
Par définition de la pression (cf T1), $\boxed{d\vec{F}_{dS}(M)=-p(M)dS_M\vec{u}_N(M)=-p(M)\overrightarrow{dS_M}}$.

dirigés vers l'extérieur, par convention

<u>Remarques</u> :

1. $-p(M)\vec{u}_N(M)$ *est une force surfacique.*
2. *La force pressante exercée sur une surface macroscopique* S *est* $\vec{F}_P=-\iint_{M\in S} p(M)\overrightarrow{dS}_M$.
3. *On verra, en partie V, que si la surface S est fermée, il s'agit de la poussée d'Archimède appliquée au volume renfermé par S.*

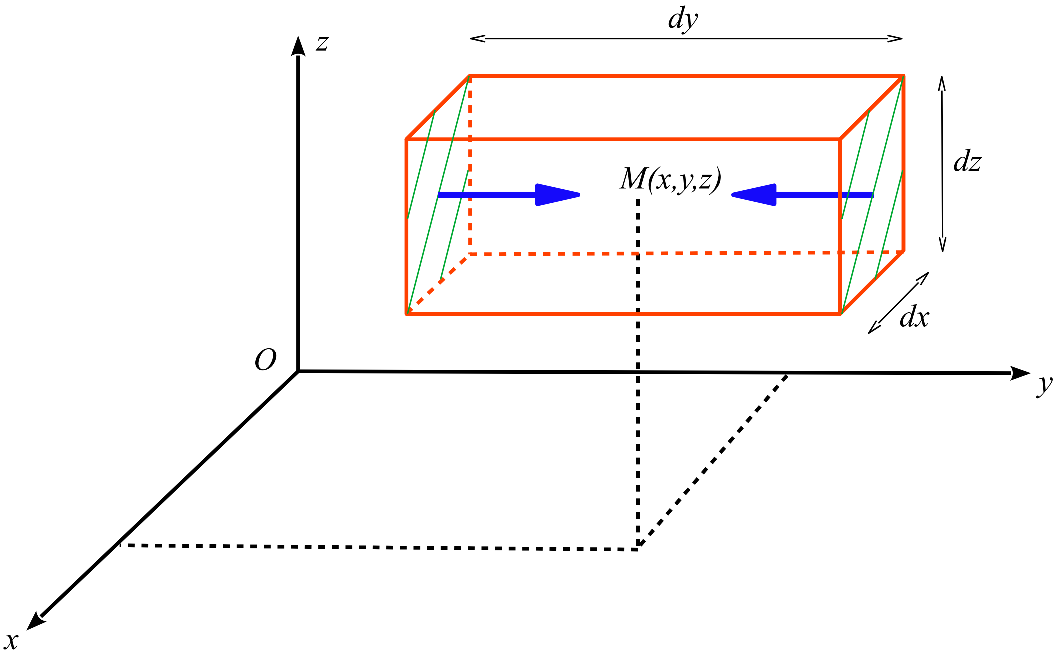
c) Résultante des forces pressantes s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide

<u>Propriété</u> : la <u>résultante des forces pressantes</u>, s'exerçant sur une particule fluide, est équivalente à la force volumique de pression $\boxed{\vec{f}_v(\text{pression}) = -\overrightarrow{grad}\, p}$.

$N.m^{-3}$ m^{-1} $Pa = N.m^{-2}$

<u>Démonstration</u> :

On considère une particule fluide mésoscopique de forme parallélépipédique :



On note $d\vec{F}_P$ *la résultante des forces pressantes s'appliquant sur les 6 faces. Le champ de pression varie en* $p(x,y,z)$ *a priori.*

- $$d\vec{F}_P.\vec{u}_y = p(x, y - \frac{dy}{2}, z)\,dx\,dz - p(x, y + \frac{dy}{2}, z)\,dx\,dz$$
  $$= -\left(p(x, y + \frac{dy}{2}, z) - p(x, y - \frac{dy}{2}, z)\right)dx\,dz$$
  $$= -\left(\frac{p(x, y + \frac{dy}{2}, z) - p(x, y - \frac{dy}{2}, z)}{dy}\right)dx\,dy\,dz$$
  $$= -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)d\tau$$
- *De même,* $d\vec{F}_P.\vec{u}_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)d\tau$ *et* $d\vec{F}_P.\vec{u}_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)d\tau$

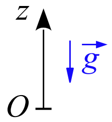
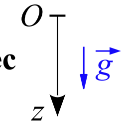
  donc $d\vec{F}_P = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{u}_z\right)d\tau$

  $= -\left(\overrightarrow{grad}\, p\right)d\tau$ *, par définition mathématique de l'opérateur gradient (cf annexe).*
- *La résultante des forces pressantes, s'exerçant sur une particule fluide, est donc équivalente à une force volumique* $\vec{f}_v = \frac{d\vec{F}_P}{d\tau} = -\overrightarrow{grad}\, p$.

2. Relation fondamentale de la statique des fluides (à savoir démontrer)

<u>RFSF</u> : au sein d'un fluide, au repos dans un référentiel galiléen, soumis à un champ de pesanteur $\vec{g}$, l'évolution du champ de pression est régie par $\boxed{\overrightarrow{grad}_M\, p=\mu(M)\vec{g}(M)}$.

<u>RFSF simplifiée</u> : de plus, si le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme, la RFSF prend la forme simplifiée :

$\boxed{\dfrac{dp}{dz}=-\mu(z)g}$ **avec**  **; ou** $\boxed{\dfrac{dp}{dz}=+\mu(z)g}$ **avec** 

<u>Démonstration</u> :
On applique la deuxième loi de Newton (PFS) à la particule fluide, au repos, dans le référentiel galiléen d'étude : $\vec{0}=d\vec{P}+d\vec{F}_P$

$$=\mu(M)d\tau\vec{g}(M)+(-\overrightarrow{grad}_M\, p)d\tau$$

d'où $\overrightarrow{grad}_M\, p=\mu(M)\vec{g}(M)$.

De plus, si le champ de pesanteur est uniforme, avec $\vec{g}=-g\vec{u}_z$, alors $\overrightarrow{grad}_M\, p=-\mu(M)g\vec{u}_z$.

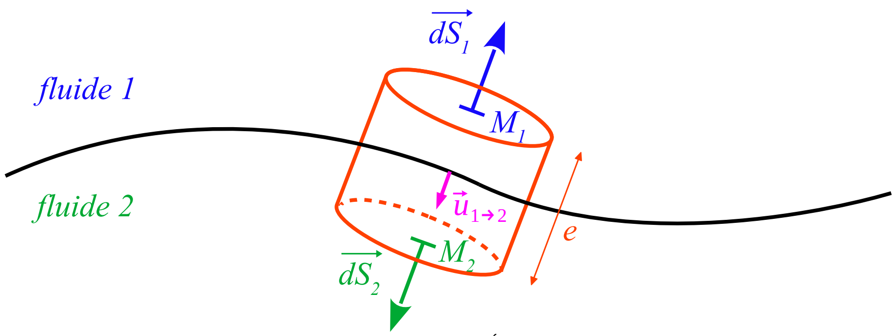
Soit $\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial p}{\partial z}=-\mu(M)g\end{cases}$ d'où $\begin{cases}p(x,y,z)=p(y,z)\\ p(y,z)=p(z)\\ \dfrac{dp}{dz}=-\mu(z)g\end{cases}$.

3. Continuité de la pression à l'interface entre 2 fluides

La RFSF est une équation différentielle du premier ordre, pour pouvoir la résoudre, il faudra connaître une condition aux limites. Elle sera parfois explicite (auquel cas, ce paragraphe n'a pas d'intérêt) ; d'autres fois, elle sera à expliciter en utilisant la continuité de la pression à l'interface entre deux fluides.

<u>Propriété</u> : il y a continuité de la pression à l'interface entre deux fluides.

<u>(Démonstration)</u> :
On considère une particule fluide cylindrique, à cheval entre les deux fluides.



Le volume de la particule fluide est $d\tau=dS.e$ *avec* $\begin{cases}dS \text{ mésoscopique}\\ e\perp\text{interface}\end{cases}$.

On applique le PFS à la particule fluide : $\vec{0}=p(M_1)dS\vec{u}_{1\to2}-p(M_2)dS\vec{u}_{1\to2}+d\vec{F}_{pression\,latérale}+d\vec{P}_{poids}$.

Si $M_1\to M_2$ *alors* $e\to0$ *et il vient :*

- $d\vec{F}_{pression\,latérale}\to\vec{0}$;
- $dm\to0$ *soit* $d\vec{P}_{poids}\to\vec{0}$

d'où $p(M_1)=p(M_2)$.

III. Statique des fluides incompressibles et homogènes

1. Hypothèses

On suppose :

- le fluide au repos par rapport au référentiel galiléen d'étude ;
- le champ de pesanteur uniforme tel que $\vec{g}=-g\vec{u}_z$;
- le fluide est incompressible et homogène : $\mu=cte$ indépendante de p et M.

Concrètement, on étudie l'évolution spatiale du champ de pression dans un liquide, au repos, dans le référentiel terrestre.

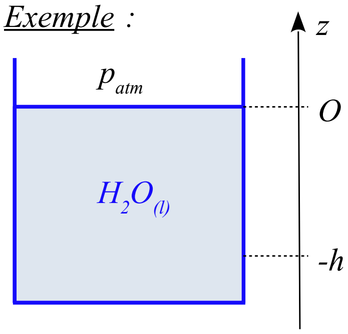
2. Évolution du champ de pression (à savoir démontrer)

On applique la RFSF simplifiée au liquide : $\frac{dp}{dz}=-\mu g$ avec μ et g des constantes.

Donc $p(z)=-\mu g z+A$.

La constante d'intégration A se détermine par une condition aux limites. Supposons que l'on connaisse la pression en $z=0$, il vient $p(0)=A$ soit $\boxed{p(z)=p(0)-\mu gz}$.

Exemple :



On considère un réservoir d'eau tel que $p(0)=p_{atm}$.
Le champ de pression dans l'eau évolue en $p_{eau}(z)=p(0)-\mu_{eau}gz$ *donc* $p_{eau}(-h)=p_{atm}+\mu_{eau}gh$, *où* h *est la profondeur d'eau.*
Si $h=10\,m$ *alors* $p_{eau}(-10\,m)=10^5+\underbrace{10^3.10.10}_{\text{pression rajoutée tous les 10 m de profondeur dans l'eau}}=10^5+10^5=2.10^5\,Pa=2\,\text{bar}$.

Conclusion : dans l'océan, la pression augmente de 1 bar tous les 10 mètres ! Donc dans la fosse des Mariannes, où $h\simeq 11\,\text{km}$, $p\simeq 1100\,\text{bar}$ *!!!*

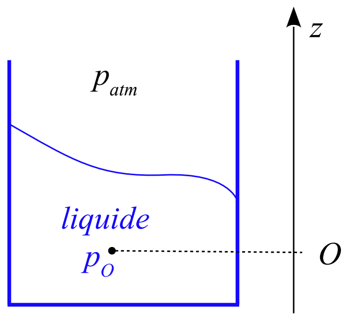
3. Applications

a) Surface libre d'un liquide au repos

<u>Surface libre d'une liquide au repos</u> = surface de séparation liquide/air

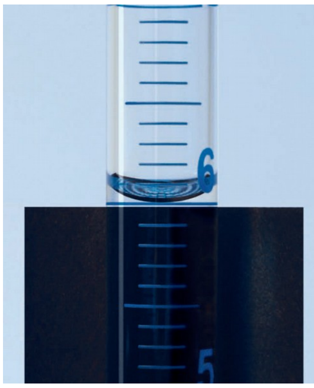
$$=\{M/p(M)=p_{atm}\}$$
$$=\{M/p_0-\mu_{liq}g\,z(M)=p_{atm}\}$$
$$=\left\{M/z(M)=\frac{p_0-p_{atm}}{\mu_{liq}g}=constante\right\}$$

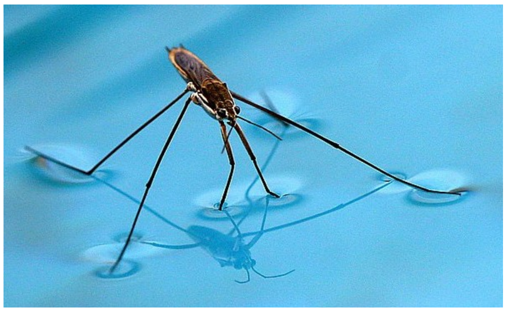
<u>= surface horizontale</u>



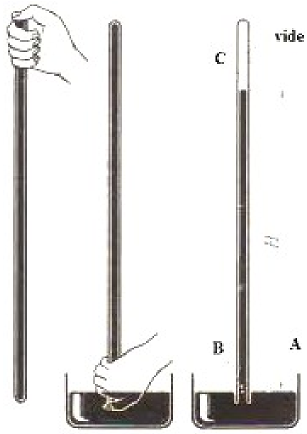
<u>Exemple</u> : le principe des vases communicants.

Remarque : si le rayon des tuyaux devient trop petit, une troisième force intervient, appelée tension superficielle (ou capillarité), et met donc la RFSF en défaut ainsi que ses conséquences explicitées dans ce paragraphe.





b) Baromètre de Torricelli (italien 1608-1647)



Expérience historique de Torricelli, dont le but est de mesurer, avec précision, la pression atmosphérique. On remplit un tube de mercure liquide ($Hg_{(l)}$), puis on le retourne dans un bain de mercure liquide.

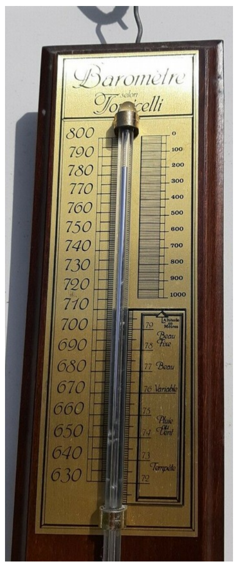
- Si la hauteur du tube n'est pas trop grande, rien ne se passe.
- Si la hauteur du tube dépasse une certaine valeur, la hauteur de mercure dans le tube est plus petite que la hauteur de tube !

En toute logique, Torricelli écrit :

- $p_A = p_{atm}$ (continuité de la pression en A) ;
- $p_C = 0$ (continuité de la pression en C) ;
- Et la RFSF dans le mercure liquide donne $\begin{cases} p_B = p_C + \mu_{Hg}\, g\, H \\ p_B = p_A \end{cases}$.

Il vient alors $\boxed{p_{atm} = \mu_{Hg}\, g\, H}$: le premier baromètre de l'histoire est né !

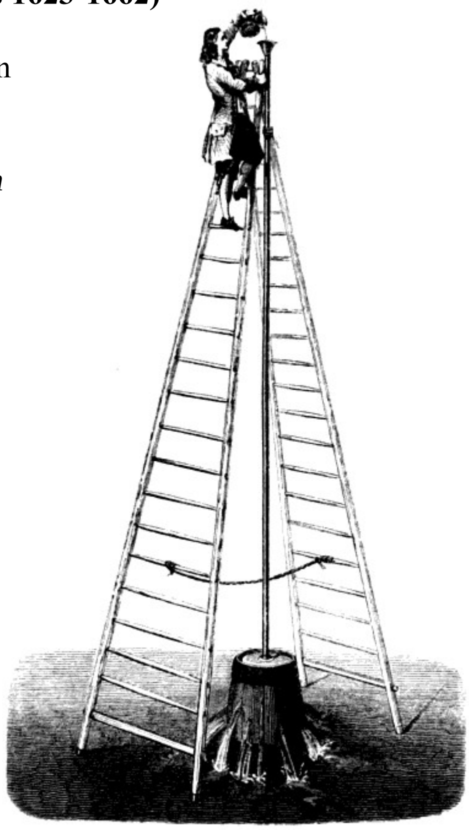
A.N. : $\mu_{Hg} = 13{,}6.10^3\, kg.m^{-3}$ et si $p_{atm} = 1\, atm = 1{,}013.10^5\, Pa$ alors $H = 0{,}760\, m$ i.e. $\underline{1\, atm \Leftrightarrow 760\, mmHg}$.



Remarques :

1. *Le « $mmHg$ » est donc une unité historique désuète de la pression, on l'appelait aussi le « torr », en l'honneur de Torricelli.*
2. *Pour un baromètre de Torricelli, réalisé avec une colonne d'eau, on aurait* $H_{eau} = \dfrac{p_{atm}}{\mu_{eau}\, g} \simeq 10\, m$ *! Difficile à réaliser et à exploiter, c'est pourquoi Torricelli a eu l'idée d'utiliser le liquide stable à pression et température ambiantes, le plus dense (seul métal liquide à P et T ambiantes).*
3. *Cette expérience historique n'est plus réalisée en cours car le mercure liquide est cancérigène, c'est pourquoi les thermomètres à mercure ainsi que les baromètres de Torricelli ne se trouvent plus dans le commerce.*
4. *Avant les stations météo électroniques ou les applis météo, tout un chacun possédait son baromètre de Torricelli à la maison, afin de connaître la météo approximative à venir (peut être en avez-vous déjà vu un chez un « ancien »).*

c) Expérience du crève tonneau de Pascal (français 1623-1662)



Expérience historique de Pascal montrant l'importance de la pression (et non de la masse d'eau mise en jeu).

Par la RFSF, $\Delta p = p_A - p_B = \mu_{eau} g h$: si le tube est très fin et h grand, le tonneau crève !
Pascal a utilisé :

- un tonneau de $200 L$ et $1 m$ de haut ;
- un tuyau de $9 m$ mais ne contenant qu' $1 L$ d'eau ;
- A.N. pour son expérience : $\Delta p = p_A - p_B = \mu_{eau} g h \simeq 10^5 Pa$.

Remarque : Pascal étant le physicien qui a montré l'importance de la pression, il est passé à la postérité et l'unité légale de la pression porte son nom.
Ci-dessous, un billet de 500 Francs, à l'effigie de Blaise Pascal.

IV. Statique de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait

1. Modèle de l'atmosphère isotherme

- statique : on suppose que l'atmosphère est au repos par rapport au référentiel terrestre galiléen ;
- on suppose que le champ de pesanteur est uniforme tel que $\vec{g}=-g\vec{u}_z$;
- isotherme : on suppose que $T(z)=T=cte$ dans l'atmosphère ;
- modèle du gaz parfait : on suppose que l'atmosphère est un gaz parfait à l'équilibre donc fluide compressible ($\mu(z)$ dépend de $p(z)$).

  Pour une particule fluide de gaz parfait : $p(z)d\tau=dn\,RT$ avec $dn=\frac{dm}{M}=\frac{\mu(z)d\tau}{M}$

  donc $p(z)=\frac{\mu(z)RT}{M}$ soit $\boxed{\mu(z)=\frac{M}{RT}p(z)}$.

__Remarque__ : discussion sur les hypothèses du modèle :

- *On a déjà vu que g ne varie qu'au 3ème chiffre significatif à la surface de la Terre (entre l'altitude nulle en France et le sommet de l'Everest par exemple, cf M2) donc l'évolution relative de g est de l'ordre de 1 % ;*
- *l'hypothèse isotherme est plus délicate : $T_{Cannes}(printemps)\simeq 20\,°C$ et $T_{Mont\,Everest}(printemps)\simeq -10\,°C$, il faut alors penser en température absolue ! $T_{Cannes}(printemps)\simeq 293\,K$ et $T_{Mont\,Everest}(printemps)\simeq 263\,K$ soit une évolution relative de la température d'environ $\frac{\Delta T}{T}\simeq 10\,\%$.*

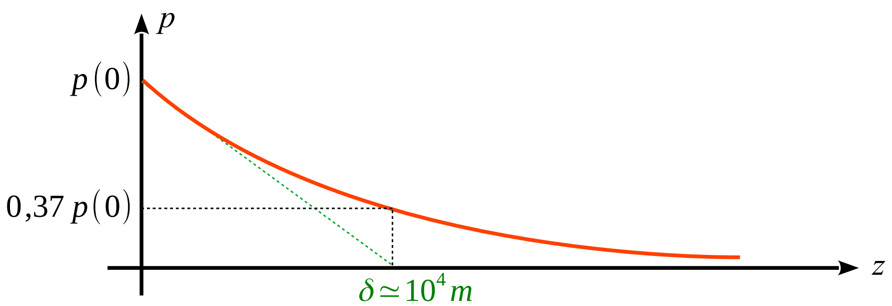
2. Évolution du champ de pression (à savoir démontrer)

On applique la RFSF simplifiée à l'atmosphère : $\frac{dp}{dz}=-\mu(z)g$ avec $\mu(z)=\frac{M}{RT}p(z)$.

Soit $\frac{dp}{dz}=-\frac{Mg}{RT}p(z)$ d'où $\frac{dp}{dz}+\frac{Mg}{RT}p(z)=0$, il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre.

Il vient $\boxed{p(z)=p(0)e^{-\frac{Mg}{RT}z}=p(0)e^{-z/\delta}}$ où $\boxed{\delta=\frac{RT}{Mg}}$ est la distance caractéristique (en m) d'évolution de $p(z)$.

__OdG__ : à $T=300\,K$, avec $M(air)=0{,}80\,M(N_2)+0{,}20\,M(O_2)=29.10^{-3}\,kg.mol^{-1}$, on obtient $\underline{\delta=8{,}6\,km\simeq 10^4\,m}$: environ la hauteur du Mont Everest, le « toit du monde ».



__Remarques__ :

1. *On a montré que $\mu(z)$ et $p(z)$ sont proportionnelles dans ce model donc $\mu(z)=\mu(0)e^{-z/\delta}$. On comprend pourquoi il est difficile de s'oxygéner en altitude.*
2. *Si on étudie un gaz dans une enceinte de 1m de hauteur, $\frac{z_{max}}{\delta}\simeq 10^{-4}$ et $e^{-10^{-4}}=0{,}9999\simeq 1$ donc $p(z)=p(0)$ à 4 chiffres significatifs au sein du gaz !*
   On néglige donc l'influence du champ de pesanteur pour les machines thermiques (cf T1).

V. Poussée d'Archimède

1. Théorème d'Archimède (de Syracuse -287/-212) ; *cf M2*

Tout corps au repos immergé dans un fluide subit de la part de ce fluide une force, appelée <u>poussée d'Archimède</u>, égale (en norme) et opposée au poids du fluide déplacé par le corps.

La poussée d'Archimède, souvent notée $\vec{\Pi}$, est appliquée au centre de masse du volume de fluide déplacé. Ce point est appelé **centre de poussée**.

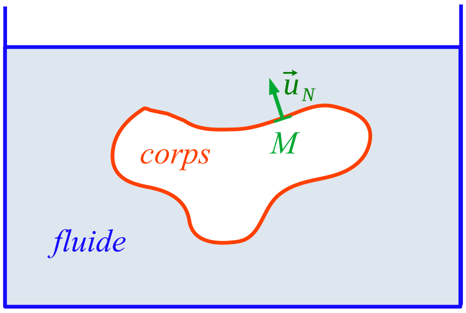
Si la masse volumique du fluide et le champ de pesanteur sont uniformes sur la dimension du volume du corps, alors $\boxed{\vec{\Pi}=-\vec{P}_{fluide\ déplacé}=-\mu_{fluide}V_{corps}\vec{g}}$.

<u>*Remarques*</u> *:*

1. *Si le corps est en mouvement lent par rapport au fluide, on continue d'appliquer le théorème d'Archimède (sinon il faut faire de la mécanique des fluides, cf MF2).*
2. *En général, on néglige la poussée d'Archimède dans l'air (sauf dans le cas d'une Montgolfière par exemple).*

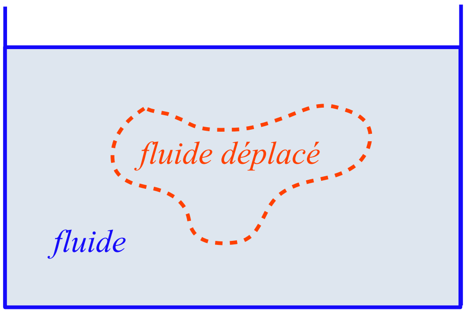
2. *Démonstration par raisonnement de pensée*

1. *On considère le corps immergé dans le fluide, l'ensemble est au repos dans le référentiel galiléen d'étude :*



La force appliquée par le fluide sur le corps est la force pressante : $\vec{F}_P=-\oint\!\!\oint_{M\in\text{surface du solide}} p(M)\overrightarrow{dS}_M$, *il s'agit donc de la poussée d'Archimède :* $\vec{\Pi}=-\oint\!\!\oint_{M\in\text{surface du solide}} p(M)dS_M\vec{u}_N$ *: calcul délicat dans le cas d'une géométrie quelconque du corps !*

2. *On remplace fictivement (par la pensée ...) le corps par un même volume de fluide, appelé fluide déplacé, de sorte que l'ensemble du fluide reste au repos, dans le référentiel d'étude :*

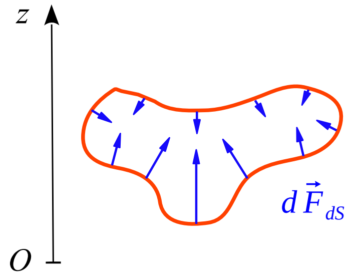


Par la RFSF, la pression en tout point M *du fluide n'a pas changé !*

3. *On applique la deuxième loi de Newton, au fluide déplacé, au repos dans le référentiel galiléen :* $\vec{0}=\vec{P}_{fluide\ déplacé}+\vec{F}_p=\vec{P}_{fluide\ déplacé}+\vec{\Pi}$ *soit* $\vec{\Pi}=-\vec{P}_{fluide\ déplacé}$.

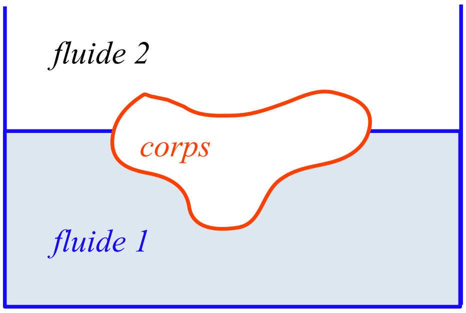
Remarques :

1. *L'origine de* $\vec{\Pi}$ *provient du fait que* $p(z)>p(z+dz)$ *; d'ailleurs on propose une autre démonstration, basée sur cette remarque, en dernier point.*

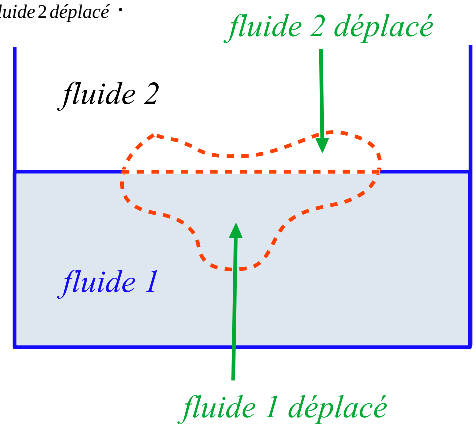


2. *Si* $\|\vec{P}_{corps}\|>\|\vec{\Pi}\|$ *alors le corps coule :* $\mu_{corps}>\mu_{fluide}$ *;*
3. *Si* $\|\vec{P}_{corps}\|<\|\vec{\Pi}\|$ *alors le corps flotte :* $\mu_{corps}<\mu_{fluide}$ *.*

4. *Si l'objet est en équilibre entre deux fluides,* $\vec{\Pi}=-\vec{P}_{fluide\,1\,déplacé}-\vec{P}_{fluide\,2\,déplacé}$ *.*

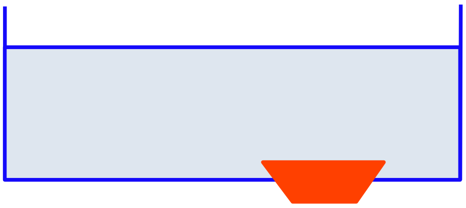


même raisonnement que pour la démonstration avec un fluide déplacé :
PFD appliqué au système en pointillé au repos d'où
$\vec{\Pi}+\vec{P}_{fluide\ 1\ déplacé}\,\vec{P}_{fluide\ 2\ déplacé}\,,=\vec{0}$

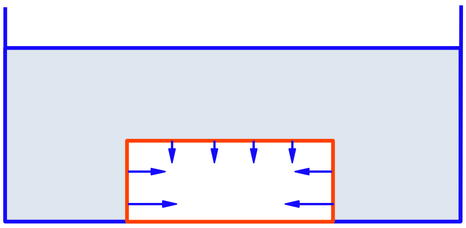


3. Cas où on ne peut pas appliquer le théorème d'Archimède

- Cas d'un bouchon d'un évier ou d'une baignoire : si on remplace le bouchon par le fluide, ce dernier n'est plus au repos, la démo est mise en défaut.



- Cas de l'effet ventouse : si une surface de l'objet coïncide avec une surface de la paroi (le fluide entre les deux n'étant plus présent).

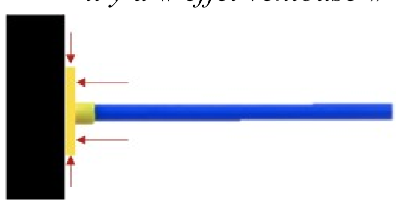


« il manque $\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$ *»*

Remarque :

ici, le théorème d'Archimède s'applique :

ici, le théorème d'Archimède est mis en défaut, il y a « effet ventouse » :



Annexe mathématique : l'opérateur gradient

1. Définition

Soit un point M de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et une fonction $f(x, y, z)$ des coordonnées de M. f représente un champ scalaire dans l'espace.

Lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_M = d\overrightarrow{OM}$ de M, la fonction f varie de df, appelée différentielle de la fonction f.
Le gradient de la fonction f, noté $\overrightarrow{grad}\, f$, est un opérateur mathématique défini par : $\boxed{\boldsymbol{df = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \,.\, \overrightarrow{d\ell}_M}}$. $\overrightarrow{grad}\, f$ est alors défini en tout point de l'espace et représente un champ vectoriel.

<u>Remarque</u> : La dimension physique du gradient de f est égale à la dimension de f divisée par une longueur.

2. Exemple en coordonnées cartésiennes

On considère un déplacement élémentaire de M : $d\vec{\ell}_M = d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$.
Lors de ce déplacement élémentaire de M, la fonction *f* varie de : $d\,f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$.

On peut écrire : $d f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \,.\, \overrightarrow{d\ell}_M$ avec $\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}}$.

<u>Exemple</u> : calculer le gradient de la fonction $f(x, y, z) = x\,y^2 + x\,z$:

3. Signification du gradient d'un champ scalaire

Soit $T(M)$ le champ scalaire température i.e à tout point M est associé la température $T(M) = T(x, y, z)$.
On a alors le gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z$:

- si la température est uniforme alors son gradient est nul ;
- si la température varie selon x seulement alors la norme du gradient est égal à $\left|\frac{\partial T}{\partial x}\right|$.

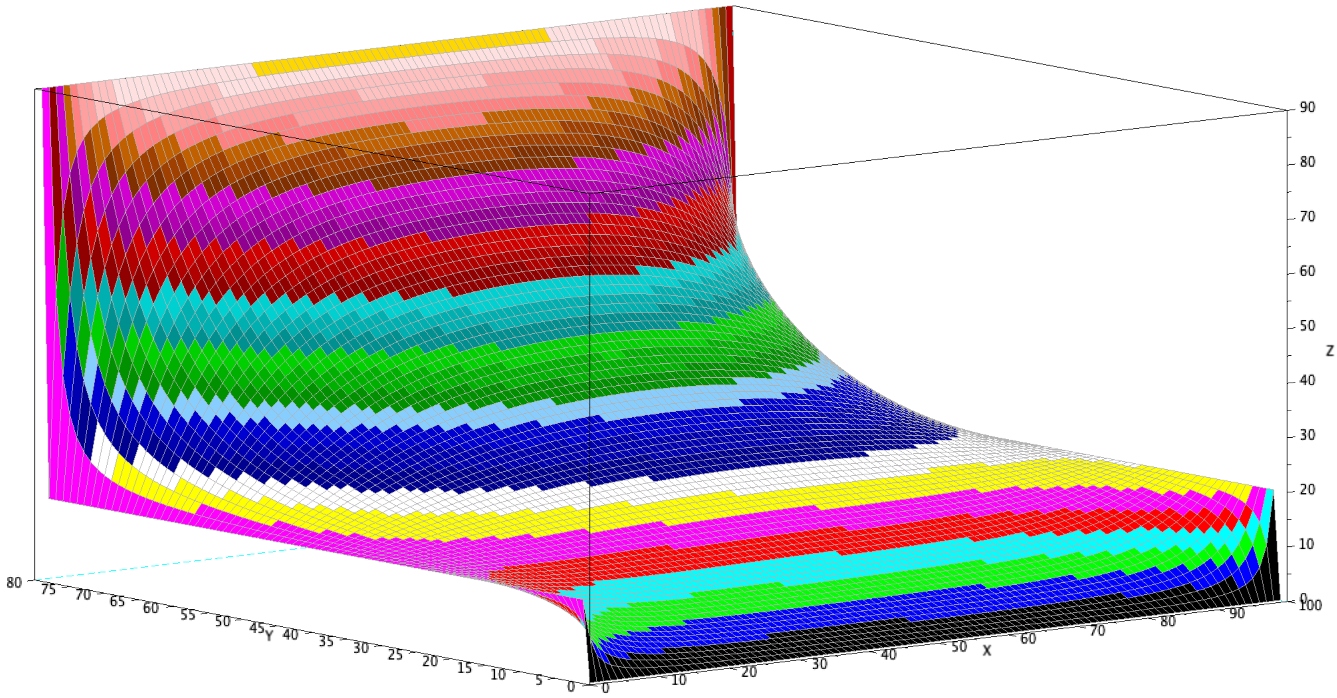
Le gradient caractérise <u>le caractère non uniforme d'un champ scalaire, c'est-à-dire ses variations spatiales</u>. Le gradient est orienté dans le sens de croissance du champ scalaire et sa direction est celle le long de laquelle ce champ varie le plus rapidement.

4. Expressions du gradient

Coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$;

Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$;

Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$.



90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Z
80
75
70
65
60
55
50
45
Y
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
X
60
70
80
90
100