MESURES ET INCERTITUDES : INTRODUCTION À LA MÉTROLOGIE

1

I. Vocabulaire de base

- *Mesurande* : grandeur que l'on souhaite mesurer expérimentalement afin de connaître sa valeur.
- *Mesurage* (ou processus de mesure) : ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer la valeur d'une grandeur (le mesurande).
- *Valeur vraie* : valeur du mesurande que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. On ne la connaît pas.
- *Erreur* : différence entre la valeur mesurée (résultat d'un mesurage) et la valeur vraie du mesurande.
- *Grandeur d'influence* : grandeur physique qui influe sur le résultat d'un mesurage.

2

I. Vocabulaire de base

Il y a 2 types d'erreurs :

- *Erreur systématique* : composante de l'erreur qui ne diminuera pas même en répétant plusieurs fois les mesures.
- *Erreur aléatoire* : provient de variations aléatoires de paramètres qui modifient la valeur mesurée obtenue lors de plusieurs mesurages identiques.

Rmq : il y a une troisième source d'erreur liée à la définition même du mesurande !

3

I. Vocabulaire de base

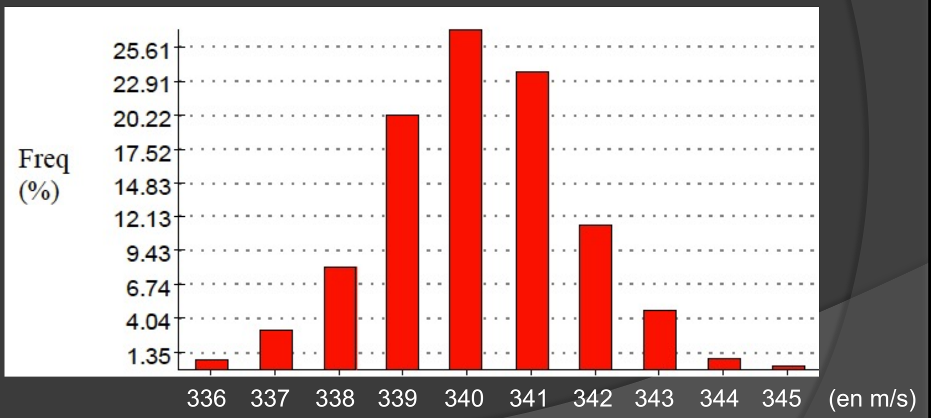
Mise en évidence de l'erreur aléatoire :

- Mesurage de la vitesse du son
- Une personne du groupe réalise une mesure, note sa mesure puis démonte TOUT !
- Les autres personnes du groupe réalisent la même chose.
- On refait 5 fois sans se soucier des résultats précédents !

4

I. Vocabulaire de base

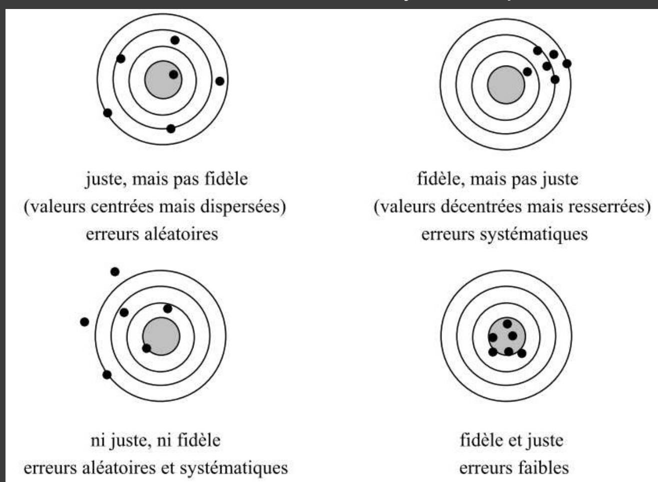
Si le nombre de mesures tend vers 1000 ou plus :



5

I. Vocabulaire de base

Schématisation des erreurs aléatoires et systématiques :



Par la suite, on suppose l'erreur systématique négligeable !

Incertitude de mesure : en absence d'erreur systématique, elle définit un intervalle autour de la valeur mesurée qui inclut la valeur vraie avec un niveau de confiance déterminé.

6

II. Évaluation d'une incertitude-type

Évaluation de type A : cas où l'on refait plusieurs fois la même mesure.

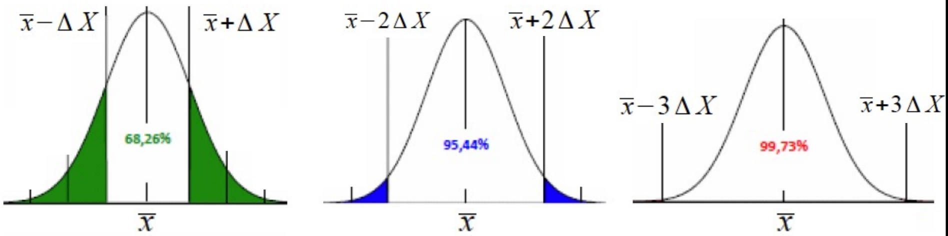
Cette évaluation est faite à partir de l'analyse statistique des résultats obtenus.

On veut mesurer la grandeur X et évaluer son incertitude-type. On fait n expériences identiques et indépendantes et on trouve les valeurs x_1, x_2, …, x_n pour la grandeur X.

La meilleure estimation de la valeur vraie de X est donnée par la moyenne $\overline{x}$ des valeurs obtenues : $\boxed{\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}$.

On appelle **écart-type** σ la grandeur : $\boxed{\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n-1}}}$.

L'**incertitude-type** ΔX est alors donnée par : $\boxed{\Delta X=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (diminue avec le nombre n de mesures réalisées).



7

II. Évaluation d'une incertitude-type

Évaluation de type B : cas où l'on ne fait la mesure qu'une fois (le mesurage ne consiste qu'à utiliser un instrument de mesure)

L'écart-type σ est estimé à partir de l'instrument utilisé (règle graduée en mm ou en 1/10 mm) ou des spécifications du constructeur de l'appareil de mesure (voltmètre, verrerie en chimie par exemple).

Pour les appareils de mesure, il existe différents cas :

- **résolution : le constructeur indique seulement la résolution de l'appareil (graduation de l'appareil). L'écart-type σ est égal à la moitié de la plus petite graduation.**
  L'incertitude-type ΔX est alors : $\boxed{\Delta X=\frac{\sigma}{\sqrt{3}}}$.
  Exemple : thermomètre qui mesure T à 0,1°C près donc $\Delta T=0{,}05/\sqrt{3}=0{,}03\ °C$.
- tolérance : le constructeur indique un pourcentage t de la valeur X. On a : $\Delta X=t/100*X/\sqrt{3}$.
  Exemple : résistance R de $200\,\Omega$ avec une tolérance de 2 % donc $\Delta R=2/100*200/\sqrt{3}=2\Omega$.
- instrument de classe α : le constructeur indique la classe α . On a alors, lorsque l'appareil est utilisé sur le calibre C : $\Delta X=C*\alpha/100/\sqrt{3}$.
  Exemple : tension U mesurée par un voltmètre de classe 2 utilisé sur le calibre 20V donc $\Delta U=20*2/100/\sqrt{3}=0{,}2\,V$.
- appareil numérique : le constructeur indique pour la précision un pourcentage p de la valeur lue et le nombre N de digit (i.e N unités sur le dernier chiffre affiché). On a alors : $\Delta X=\frac{p/100*valeur\ lue+N\ digit}{\sqrt{3}}$
  Exemple : intensité I=5,21 mA mesurée par un ampèremètre numérique dont la précision est (3% +- 2 digit) donc $\Delta I=\frac{3/100*5{,}21+0{,}02}{\sqrt{3}}=0{,}1\,mA$

8

III. Incertitude élargie

L'incertitude élargie ΔX_e est égale à l'incertitude-type ΔX multipliée par un coefficient k appelé facteur d'élargissement : $\Delta X_e = k \Delta X$.

Cela permet d'affecter un niveau de confiance à l'intervalle formé par l'incertitude élargie.

On utilisera très souvent le coefficient k=2 associé à un niveau de confiance de 95 %.

Par exemple, si on a calculé une incertitude-type ΔX pour la grandeur X alors l'incertitude élargie associée à un niveau de confiance de 95 % est $\Delta X_e = 2 \Delta X$. Cela signifie que si l'on répète infiniment la mesure, 95 % des valeurs mesurées seront comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta X_e ; \bar{x} + \Delta X_e]$.

Remarque : l'incertitude-type ΔX correspond à un niveau de confiance de 68 %. Si le facteur d'élargissement est 3 alors le niveau de confiance est de 99 %. Ceci est vrai dans le cas d'erreurs purement aléatoires.

9

IV. Présentation du résultat et analyse

Il faut d'abord choisir le **nombre de chiffres significatifs** du résultat final. **On ne garde que 1 chiffre significatif pour l'incertitude élargie et la valeur de la mesure doit être cohérente avec cette incertitude quant au dernier chiffre donné.**
Remarque : beaucoup de chercheurs conservent 2 chiffres significatifs sur l'incertitude élargie ...

Exemples : valeurs moyenne $\bar{x}$ et de son incertitude élargie ΔX_e données par la calculatrice :

- $\bar{x} = 123{,}52866901$ et $\Delta X_e = 2{,}6666667$. On garde : $\Delta X_e = 3$ et donc $\bar{x} = 124$.
- $\bar{x} = 5{,}23$ et $\Delta X_e = 0{,}19$. On garde : $\Delta X_e = 0{,}2$ et donc $\bar{x} = 5{,}2$.

Tout résultat expérimental devrait être présenté sous la forme :

grandeur $X = \bar{x} \pm \Delta X_e$ unité avec un niveau de confiance de 95 %

Exemple : on trouve une longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda} = 632{,}8\,nm$ et une incertitude élargie d'un facteur 2 : $\Delta \lambda_e = 2{,}05$. On a alors le résultat suivant : $\lambda = 633 \pm 2\,nm$ avec un niveau de confiance de 95 %.

10

V. Incertitude-type composée

Exemple : justement on aurait pu le faire sur notre mesurage !

v = D/T ; v est donc une mesure indirecte composée de 2 mesures directes : D et T.

On aurait pu alors exploiter les incertitudes sur D et T pour en déduire celle sur v.

11

V. Incertitude-type composée

On s'intéresse ici au problème suivant : on mesure indirectement la grandeur $Q = f(X, Y, \ldots)$ en mesurant X, Y, … ainsi que les incertitudes-types ΔX, ΔY, … associées. Quelle est alors l'incertitude-type sur Q ?

$$\boxed{\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 (\Delta X)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 (\Delta Y)^2 + \ldots}}$$

$\frac{\partial f}{\partial X}$ est la « dérivée partielle » de f par rapport à X. On la trouve en dérivant la fonction f par rapport à X en considérant toutes les autres variables (Y, …) comme constantes.

Exemples :

- Q = X + Y : $\frac{\partial f}{\partial X} = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial Y} = 1$ donc $\Delta Q = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$
- Q = X − Y : $\frac{\partial f}{\partial X} = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial Y} = -1$ donc $\Delta Q = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$
- Q = XY : $\frac{\partial f}{\partial X} = Y$ et $\frac{\partial f}{\partial Y} = X$ donc $\Delta Q = \sqrt{Y^2 (\Delta X)^2 + X^2 (\Delta Y)^2}$
- Q = X/Y : $\frac{\partial f}{\partial X} = 1/Y$ et $\frac{\partial f}{\partial Y} = -X/Y^2$ donc $\Delta Q = \sqrt{(1/Y)^2 (\Delta X)^2 + (X/Y^2)^2 (\Delta Y)^2}$
- Q = aX avec a une constante numérique : $\frac{\partial f}{\partial X} = a$ donc $\Delta Q = \sqrt{a^2 (\Delta X)^2} = |a| \Delta X$

Une fois l'incertitue-type calculée pour Q, on peut en déduire son incertitude élargie au niveau de confiance choisi.

12