TD 6 : Réflexion sur un plan conducteur parfait

Exercice 1 : Réflexion d'une onde – Cavité résonante

On considère une onde électromagnétique dans le vide dont le champ électrique, en notation complexe, prend la forme $\underline{\vec{E}_i}(M,t)=E_0 e^{i(\omega t-kz)}\vec{u}_x$ avec $i^2=-1$ et $\vec{E}_i(M,t)=\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}_i}(M,t))$.
Cette onde se réfléchit sur un conducteur plan parfait occupant le demi-espace $z>0$.

1. Comment peut-on qualifier l'onde incidente ?
2. Rappeler la définition et les caractéristiques d'un conducteur parfait.
3. Donner l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}_r}(M,t)$ de l'onde réfléchie.
4. Démontrer l'expression du champ électrique total $\underline{\vec{E}}(M,t)$ dans le demi-espace $z<0$.
5. Démontrer l'expression du champ magnétique total $\underline{\vec{B}}(M,t)$ dans le demi-espace $z<0$.
6. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $<\vec{\Pi}(M,t)>$ dans le demi-espace $z<0$.
7. Exprimer la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique $<w_{em}(M,t)>$ dans le demi-espace $z<0$.
8. Exprimer la densité surfacique de courant $\vec{j}_s(M,t)$ en $z=0$.
9. On s'intéresse maintenant à la cavité résonante constituée par le plan précédent ($z=0$) et par un second plan métallique parfait situé en $z=-L$. Déterminer les fréquences (dites propres) f_p de l'onde sinusoïdale qui peuvent exister dans cette cavité en fonction de L, c et de l'entier p.

Exercice 2 : Propagation entre deux plans conducteurs parfaits

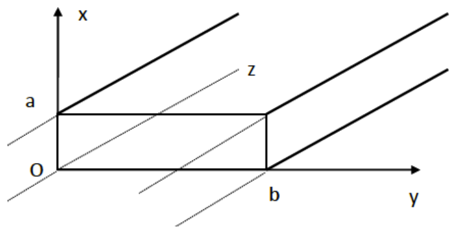
Une onde électromagnétique se propage dans le vide dans la direction (Ox) entre deux plans conducteurs parfaits situés en $z=0$ et $z=a$. Le champ électrique de cette onde s'écrit $\vec{E}=E_0\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\cos(kx-\omega t)\vec{u}_y$ avec $k>0$ et $E_0>0$.

1. Vérifier que ce champ électrique vérifie bien les conditions aux limites.
   Comment peut-on caractériser cette onde ?
2. Exprimer k en fonction de ω, c et a. Que peut-on en conclure ?
3. Exprimer le champ magnétique associé.
4. Calculer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

Remarque : si on rajoute deux autres plans conducteurs parfaits en $y=0$ et $y=b$, on parle de guide d'onde.

Pour aller plus loin …

Exercice 3 : Guide d'onde



Un guide d'onde est un cylindre métallique creux illimité, d'axe (Oz), et dont la section creuse est rectangulaire (creux pour $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$) ; l'intérieur du guide est rempli d'aire, assimilé au vide.
On adopte, pour le métal, le modèle du conducteur parfait.
On cherche une solution à l'équation de propagation du champ électrique dans le guide d'onde, en notation complexe, sous la forme $\underline{\vec{E}}=A(x\,,y)e^{i(\omega t-kz)}\vec{u}_y$.

1. Montrer que $A(x\,,y)$ ne dépend pas de y.
2. Montrer que $A(x=0)=0$ et $A(x=a)=0$.
3. À partir de l'équation de propagation, établir l'équation aux dérivées partielles dont est solution $A(x)$.
4. En déduire qu'on a nécessairement $K^2=k^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}<0$ et que les expressions possibles de $\underline{\vec{E}}$, qu'on appellera modes n, prennent la forme $\underline{\vec{E}_n}=A_n\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)e^{i(\omega t-k_n z)}\vec{u}_y$ où n est un entier et $k_n^2=\dfrac{\omega^2}{c^2}-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$.
5. Montrer que pour qu'il y ait propagation dans le guide d'onde, les pulsations doivent être plus grandes qu'une pulsation critique ω_c que l'on exprimera.
6. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ du mode n et vérifier qu'il satisfait aux conditions aux limites.