AP_07 Loi Entrée – Sortie géométrique

CORRECTION

Méthodologie pour l'établissement d'une loi entrée-sortie géométrique

1) **Repérage** : on associe un repère à chaque solide.

2) **Paramétrage** : on paramètre la position relative (paramètre de position ou d'angle) entre les 2 solides en fonction du mouvement effectif entre ces solides.

3) **Figures planes** : on trace les figures planes pour les angles afin de bien définir ce paramétrage et faciliter les calculs à venir (**attention** à bien tracer ces figures pour de petits angles positifs en respectant bien le sens direct des rotations).

4) Fermetures géométriques :
   - on écrit le vecteur position ou la fermeture géométrique en position (que l'on développe avec la **relation de Chasles**)
   - on écrit la position angulaire du solide en sortie ou la fermeture géométrique angulaire (que l'on développe avec la **composition des angles**).

5) **Projection** : on utilise les figures planes pour réaliser les produits scalaires de projection des équations vectorielles données par les fermetures géométriques.
   En pratique, on utilise le **produit scalaire entre vecteurs unitaires :** $\vec{u}.\vec{v} = \cos(\vec{u};\vec{v})$.

6) **Simplification :** on projette les équations vectorielles en supprimant les paramètres intermédiaires :
   - soit par le choix d'une **direction optimale de projection** ne faisant pas apparaitre de paramètres intermédiaires (projection perpendiculaire ou colinéaire à une direction de translation)
   - soit par combinaisons des équations de projections sur le repère de référence des angles

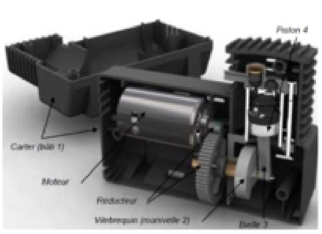
   (en utilisant notamment les relations trigonométriques suivantes :
   $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ ou $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$)

Les deux premières étapes sont souvent proposées dans les sujets de concours.

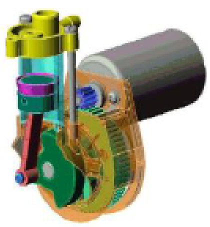
Cahier des charges : Le compresseur doit avoir une cylindrée $\mathcal{V} = 1{,}5\ dm^3.tr^{-1}$ à $\pm\ 0{,}1\ dm^3.tr^{-1}$

Notations et données concernant le compresseur :

Réel

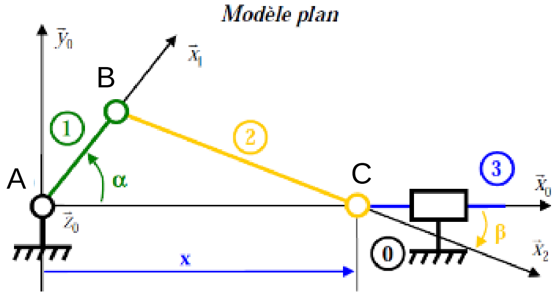


Modèle virtuel



AB=e
BC=L

Modèle plan



- Excentrique : e=100 mm
- Longueur de bielle 2 : L=300 mm
- Diamètre du piston 3 : d=100mm

Modélisation

1) Identifier les 2 types de liaisons présentes dans le schéma cinématique.

pivot d'axes parallèle à $\overrightarrow{z_0}$; glissière de direction $\overrightarrow{x_0}$

2) Caractériser les mouvements suivants :

- 1 / 0 : **rotation d'axe (A, $\overrightarrow{z_0}$)**
- 3 / 0 : **translation rectiligne (C, $\overrightarrow{x_0}$)**
- 2 / 3 : **rotation d'axe (C, $\overrightarrow{z_0}$)**
- 2 / 0 : **mouvement plan quelconque**

3) Sur le schéma cinématique, tracer les trajectoires suivantes : $T_{B,1/0}$, $T_{C,3/0}$, $T_{C,2/0}$.

4) En dessous du schéma cinématique, tracer les figures de calculs associées aux différentes rotations.

Fermeture géométrique

5) Ecrire la fermeture géométrique vectorielle.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ **soit** $e.\overrightarrow{x_1} + L.\overrightarrow{x_2} - x.\overrightarrow{x_0} = \vec{0}$

6) Projeter la fermeture vectorielle sur le repère R_0.

sur $\overrightarrow{x_0}$: $e.\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_0} + L.\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{x_0} - x.\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{x_0} = \vec{0} \rightarrow e.\cos(\alpha) + L.\cos(\beta) - x = 0$

sur $\overrightarrow{y_0}$: $e.\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{y_0} + L.\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{y_0} - x.\overrightarrow{x_0}.\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \rightarrow e.\sin(\alpha) + L.\sin(\beta) = 0$

7) En déduire la relation entre l'entrée α piloté par le moteur et la sortie x abscisse du piston.

$$\begin{matrix} L.\cos(\beta) = x - e.\cos(\alpha) \\ L.\sin(\beta) = -e.\sin(\alpha) \end{matrix} \rightarrow L^2 = (x - e.\cos(\alpha))^2 + e^2.\sin^2(\alpha)$$

Finalement $x = e.\cos(\alpha) + \sqrt{L^2 - e^2.\sin^2(\alpha)}$

8) Placer, sur le schéma cinématique, le point mort haut x_{max}et le point mors bas x_{min}du piston.

9) En déduire, les valeurs de α correspondantes ainsi que la course $c = x_{max} - x_{min}$ du piston.

x_{min} **pour α=-180°** $\rightarrow x_{min} = e.cos(-180°)\sqrt{L^2 - e^2.\sin^2(-180°)} = L - e$

x_{max} **pour α=0°** $\rightarrow x_{min} = e.cos(0)\sqrt{L^2 - e^2.\sin^2(0)} = L + e$

Finalement c =2.e

10) Le cahier des charges est-il respecté ?

$\mathcal{V} = 2.e.\pi.\frac{d^2}{4} = 2.0,1.\pi.\frac{0,1^2}{4} = 1,57.10^{-3}m^3.tr^{-1} \equiv 1,57\ L.tr^{-1} < 1,6\ L.tr^{-1}$ **: OK**

Fermeture angulaire

11) Ajouter un paramètre δ permettant d'orienter 2 par rapport à 1 et exprimer ce paramètre en fonction des 2 autres paramètres angulaires par une fermeture angulaire.

$\overrightarrow{\alpha_{1/2}} + \overrightarrow{\alpha_{2/3}} + \overrightarrow{\alpha_{3/0}} + \overrightarrow{\alpha_{0/1}} = \vec{0} \rightarrow -\delta.\overrightarrow{z_0} + \beta.\overrightarrow{z_0} + \vec{0} - \alpha.\overrightarrow{z_0} = \vec{0}$: $\delta = \beta - \alpha$