Cours	**CIN 1**	**TSI 1 Période 1-2**
	Position et trajectoire d'un point d'un solide	**1h**
	Cycle 3 : Cinématique	4 semaines

Analyser Modéliser Résoudre Expérimenter Réaliser Concevoir Communiquer

MODELISER

Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique volumique.
Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.

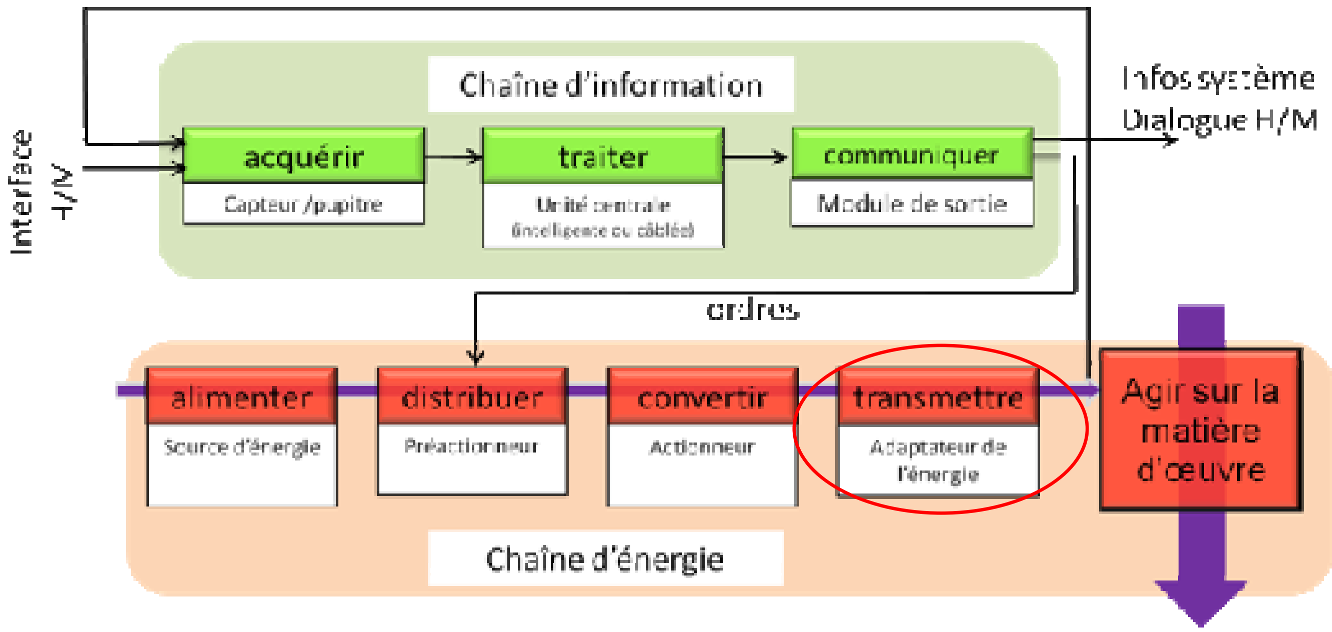
RESOUDRE

Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique ou cinématique. ⇆I
Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

1 Cinématique des solides

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser à la fonction **transmettre** de la chaine d'énergie.

Il s'agit d'être en mesure de déterminer la **loi entrée-sortie géométrique** : déterminer quel doit être l'amplitude du déplacement de l'actionneur pour obtenir le déplacement souhaité au niveau de l'effecteur.



La cinématique du solide est l'étude des mouvements des corps solides indépendamment des causes de ces mouvements dans le but de :

- Déterminer la position d'un point ou d'un solide dans l'espace.
- Déterminer la position d'un solide par rapport à un autre

2 Types de chaînes cinématiques

La cinématique d'un système est généralement définie par un schéma cinématique.
Les problèmes de cinématique sont de 2 types :

- **loi entrée-sortie pour un mécanisme à structure fermée .**

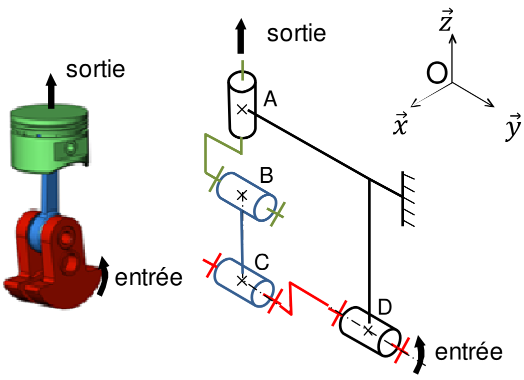
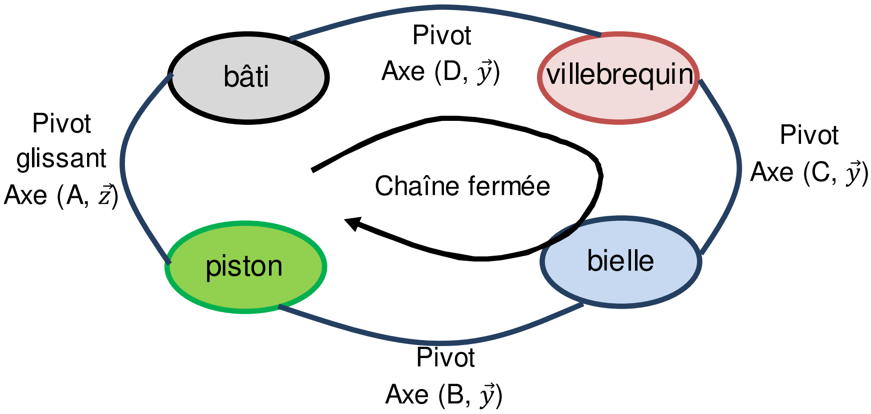


Figure 1 : Compresseur (chaîne fermée)

On souhaite déterminer le lien entre le mouvement en entrée et le mouvement en sortie.



Exemple : connaissant l'angle dont tourne la manivelle, on souhaite déterminer le déplacement du piston de compresseur (pour un tour de manivelle on peut obtenir ainsi la cylindrée du compresseur).

- **déplacement du point en bout de structure ouverte pour un mécanisme à structure ouverte.**

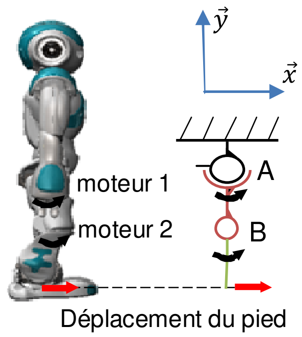
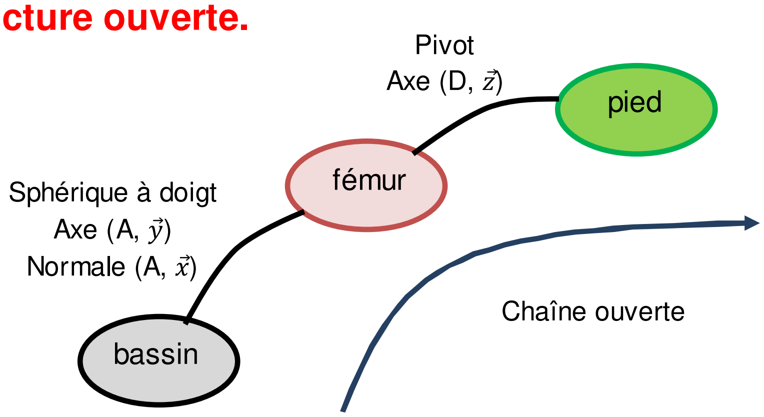


Figure 2 : Mécanisme à chaine ouverte



Exemple : connaissant le déplacement en rotation des différentes articulations d'un robot, on souhaite connaitre l'amplitude des déplacements du pied du robot en bout de chaine ouverte (pied non posé).

3 Solide

Hypothèses de la cinématique
Les hypothèses utilisées lors des études cinématiques sont issues des hypothèses mises en place lors la modélisation des liaisons (parfaites) :

- géométrie parfaite,
- liaison parfaite (sans jeu et sans frottement),
- solides indéformables.

Un solide indéformable est un milieu continu tel que la distance d_{MN} entre 2 points M et N quelconques du solide reste toujours constante : $\|\overrightarrow{MN}\|$ = **dMN = constante**.

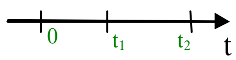
Liaison "souple"
Dans le cas où une pièce se déforme de façon importante, on modélisera les mouvements autorisés entre ses éléments par une liaison parfaite. Le reste de la structure sera alors solide.
Exemple : l'articulation souple d'une housse de Smartphone modélisable par une liaison pivot.

4 Référentiel

Pour pouvoir définir la position d'un ensemble cinématique ou d'un point de cet ensemble, il convient de repérer l'espace dans lequel évolue l'objet ainsi que le temps de l'observation.

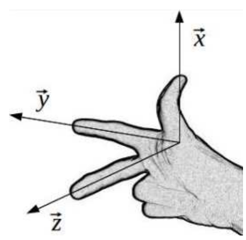
4.1 Temps

L'observation des déplacements nécessite par ailleurs de définir une **origine des temps**.
La valeur du temps par rapport à son origine est appelée un instant t exprimé en seconde "s" (unité SI - Système International)



Le temps écoulé entre 2 instants est appelé la durée (t_2 - t_1 par exemple est une durée).

4.2 Repère orthonormé direct



On associe à chaque solide un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ comprenant :

- **Un point d'origine fixe** pour le solide (ici 0),
- **Une base orthonormée directe** constituée de 3 vecteurs, perpendiculaires de longueur unitaire (=1) orientés dans le sens direct, notés $\vec{x}, \vec{y}$ *et* $\vec{z}$.
  (sens donné par les 3 doigts de la main droite : $\vec{x}$ $(pouce)$, $\vec{y}$ $(index)$, $\vec{z}$ $(annulaire)$.

Exemples pour le compresseur :

- $R_1 = (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ oriente la manivelle 1,
- $R_2 = (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ oriente la bielle 2…

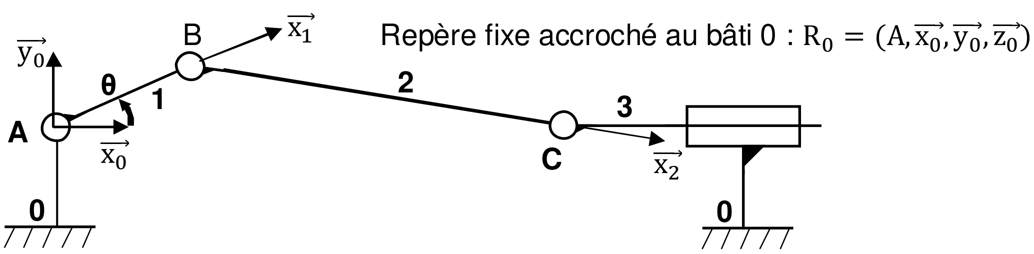


Figure 3 : Schéma cinématique d'un système bielle-manivelle (Compresseur à piston)

Autres notations pour les vecteurs de base : en physique $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, en mathématiques $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ou $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

5 Trajectoire d'un point

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par un point au cours du temps.

La trajectoire dépend de l'ensemble cinématique auquel le point est attaché et de l'ensemble cinématique d'observation.
Notations : $T_{A,i/j}$; Trajectoire du point A accroché au solide i par rapport au repère du solide j

Exemple de la Figure 4 :

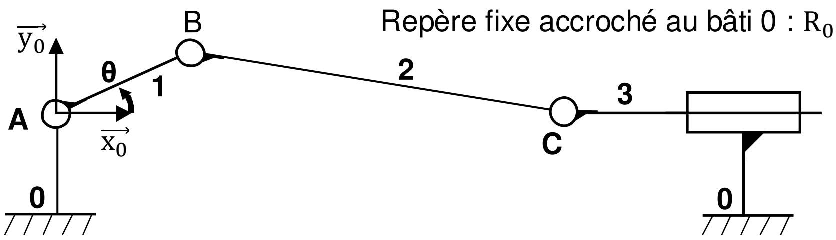
trajectoire du point A de 1 par rapport à 0 : $T_{A,1/0} = A$

trajectoire du point A de 3 par rapport à 0 : $T_{A,3/0} = segment\ de\ droite\ [A, \overrightarrow{x_0}]$

6 Mouvements entre ensembles cinématiques

6.1 Données d'un problème de cinématique

Un problème de cinématique est généralement défini par son schéma cinématique.



Repère fixe accroché au bâti 0 : $R_0 = (A, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

Figure 4 : Schéma cinématique d'un système bielle-manivelle (pompe)

6.2 Liaison ↔ mouvements – trajectoires

Le mouvement entre 2 ensembles cinématiques se définit par 2 grandeurs :

- **la trajectoire d'un des points** d'un ensemble cinématique par rapport à l'autre,
- **le déplacement angulaire** d'un ensemble cinématique par rapport à l'autre.

La méthode d'identification des mouvements dépend de l'existence de liaisons directes avec le référentiel d'observation :

- les liaisons avec le bâti 0 permettent de définir les mouvements puis les trajectoires observés par rapport au bâti.
- pour les pièces sans liaison avec le bâti, on part des trajectoires pour identifier le mouvement (par rapport au bâti).

Exemple : mouvement et trajectoires de la pompe (Figure 4)

Ensembles ciné-matiques	Liaison entre les 2 ensembles cinématiques	Mouvement effectif dans le mécanisme	Trajectoires
1/0	**pivot d'axe (A,zo)**	$M_{1/0}$: **rotation d'axe (A,zo)**	$T_{A,1/0}$= **A** $T_{B,1/0}$=**cercle (A,AB)**
3/0	**Pivot glissant d'axe (C,xo)**	$M_{3/0}$: **translation rectiligne de direction xo**	$T_{C,3/0}$= **segment de droite (C,xo)**
2/0	aucune	$M_{2/0}$:**quelconque (plan)**	$T_{B,2/0}$ =**TB,1/0=cercle (A,AB)** $T_{C,2/0}$= **TC,3/0= segment (C,xo)**

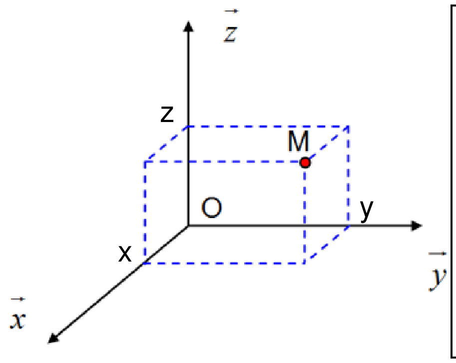
La liste des mouvements et des trajectoires associées sont définies en annexe.

7 Paramétrage

7.1 Paramétrage de la position des points

Objectif : Déterminer le **vecteur position** $\overrightarrow{AC}$ qui définit la position du point C par rapport au point A pris comme origine.

Pour définir le vecteur position d'un point d'un solide dans un repère, il convient de définir les 3 coordonnées selon les 3 directions de l'espace de ce repère (coordonnées = projections orthogonales du vecteur sur les vecteurs du repère).



Notation pour le vecteur position du point M

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{x}.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

Se note aussi : $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z)_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ ou $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

3 paramètres : **l'abscisse x**, **l'ordonnée y** et la **cote z.**

Exemple pour la bielle du compresseur :

- Vecteur position dans R_0 : $\overrightarrow{AB} = x_B.\overrightarrow{x_0} + y_B.\overrightarrow{y_0}$ $\quad (z_B = 0)$
- Plus simplement dans R_1 : $\overrightarrow{AB} = L_1.\overrightarrow{x_1}$

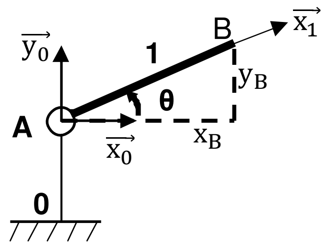


Figure 5 : Paramétrage de la bielle

Choix du repère pour le vecteur position

Le choix du repère dépend des paramètres définis dans le sujet mais **on préfèrera le repère dans lequel l'expression est la plus simple** (sauf indication contraire de l'énoncé qui peut imposer la projection dans une repère particulier en général le repère lié au bâti).

Exemple pour la bielle du compresseur :

- Si les coordonnées x_B et y_B sont définies dans le sujet, on exprimera $\overrightarrow{AB}$ dans R_1
- Mais si L_1 est également définie alors on préfèrera l'écriture de $\overrightarrow{AB}$ dans R_0 car l'expression est plus simple.

Vecteur de position de longueur variable

Le vecteur position d'un point peut être de longueur variable si l'origine et le point sont séparés par une liaison autorisant les translations.

Notation : On note alors cette variable du nom de la direction de la translation x, y ou z (on utilise également lambda λ mais on évite les autres minuscules qui sont plutôt réservées aux grandeurs constantes).

Exemple pour le compresseur :

- $\overrightarrow{AC} = x.\overrightarrow{x_0}$

La rigueur conduirait à écrire $x(t)$ mais on allège souvent l'écriture en omettant (t).

7.2 Paramétrage de l'orientation angulaire entre 2 repères

Lorsque les solides sont en rotation l'un par rapport à l'autre, il est nécessaire de définir l'angle (ou les angles : α_2, α_3, α_5…) qui permettent d'orienter les repères respectifs des solides.

Vecteur rotation

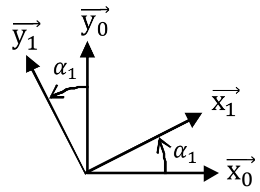
L'angle de rotation entre 2 solides peut-être défini sous la forme d'un vecteur en lui associant la direction de la rotation, par exemple $\overrightarrow{\alpha_{2/1}} = \alpha_2.\overrightarrow{z_1}$ pour l'angle α_2 entre les repères 2 et 1.

En théorie, on pourrait définir 3 angles pour le paramétrage des 3 rotations possibles (Rx, Ry et Rz).
En pratique, on définit toujours un seul angle pour passer d'un repère à un autre (on utilise éventuellement 3 repères successifs pour définir indépendamment chacun des angles).

Afin de faciliter les calculs, notamment les projections, on réalise des figures planes.

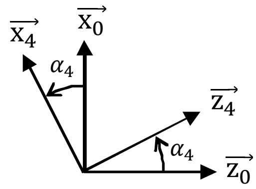
Méthode de tracé des figures planes

Le repère de base, ici R_1, doit être représenté dans le sens direct ($\vec{x} \curvearrowright \vec{y} \curvearrowright \vec{z} \curvearrowright \vec{x}$ …)
L'angle sera toujours représenté positif et petit (inférieur à $\frac{\pi}{2}$)



Attention

Lorsque la figure plane fait intervenir les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{z}$, le sens des vecteurs n'est pas très intuitif car le sens de rotation direct est de $\vec{z}$ vers $\vec{x}$ ($\vec{z}$ doit être en bas).



Remarque

La figure plane est une figure utile pour les calculs. Elle ne représente pas une position angulaire possible du mécanisme : l'angle est toujours tracé positif même si dans le mécanisme, il est toujours négatif.

8 Méthodes de résolution

8.1 Changement de base : le produit scalaire

Lorsque l'énoncé le précise, il faut être en mesure d'exprimer les coordonnées dans une base particulière (en absence de demande explicite, il est préférable de laisser les vecteurs dans le repère d'origine).

Le produit scalaire permet de calculer les projections orthogonales : $\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|.\|\vec{\mathbf{v}}\|.\cos(\vec{\mathbf{u}};\vec{\mathbf{v}})$

En pratique, on utilise le **produit scalaire entre vecteurs unitaires :** $\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}} = \cos(\vec{\mathbf{u}};\vec{\mathbf{v}})$

Exemple la bielle : $\overrightarrow{AB} = L_1.\overrightarrow{x_1}$ et on a la figure plane ci-dessus définissant α_1.

$\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_0} = \cos(\alpha_1)$

$\overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{y_0} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = \sin(\alpha_1)$

On en déduit que $\overrightarrow{AB} = L_1.(\cos(\alpha_1).\overrightarrow{x_0} + \sin(\alpha_1).\overrightarrow{y_0})$

ou en développant $\overrightarrow{AB} = L_1.\cos(\alpha_1).\overrightarrow{x_0} + L_1.\sin(\alpha_1).\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} L_1.\cos(\alpha_1) \\ L_1.\sin(\alpha_1) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$

Pour éviter des erreurs de signe lors du calcul des sin() ou cos() pour des angles $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ou $\frac{\pi}{2} + \alpha_2$, on utilisera les figures planes de la façon suivante.

Propriétés des projections des vecteurs de base grâce aux figures planes :

- projection d'un vecteur sur un autre vecteur lié par un angle α (ou $(\alpha+\pi)$ ou $(\pi\pm\alpha)$):
  - **+ cosθ** (si la projection et le vecteur sur lequel on projette sont dans le même sens),
  - **– cosθ** (si la projection et le vecteur sur lequel on projette sont en sens opposés),
- projection d'un vecteur sur un autre vecteur lié par un angle $\alpha\pm\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}-\alpha$:
  - **+ sin θ** (si la projection et le vecteur sur lequel on projette sont dans le même sens),
  - **– sin θ** (si la projection et le vecteur sur lequel on projette sont en sens opposés),

8.2 Mise en équation géométrique

✓ ***Pour les positions*** **:** on écrit la **relation de Chasles** que l'on projette éventuellement sur le repère fixe ou perpendiculairement à la direction des translations.

✓ **Pour l'orientation angulaire** : on écrit la **composition des angles d'orientation** en passant par les angles successifs définis dans le paramétrage.

Exemple pour le compresseur :

- La **position** du point C s'obtient par la relation de Chasles :

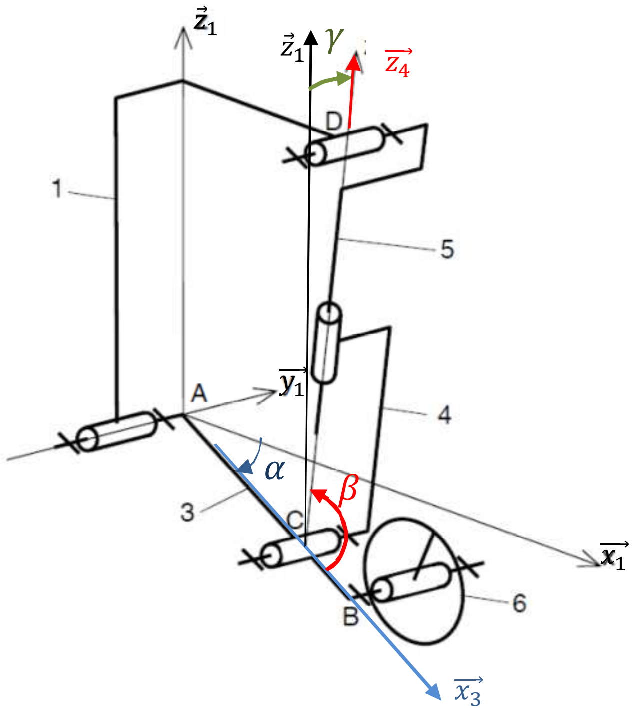
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow x\,\overrightarrow{x_0}=\ L_2\,\overrightarrow{x_2}+L_3\,\overrightarrow{x_3}$$

- L'**orientation** de la bielle 2 par rapport à la manivelle 1 s'obtient par la composition des angles :

$$\overrightarrow{\alpha_{2/1}}=\overrightarrow{\alpha_{2/0}}+\overrightarrow{\alpha_{0/1}}\Leftrightarrow \alpha_{2\,/1}.\overrightarrow{z_0}=\ (\ \alpha_2-\alpha_1\,).\overrightarrow{z_0}$$

8.3 Spécificité des chaînes cinématiques fermées

Exemple : Train d'atterrissage d'hélicoptère



Paramétrage du modèle cinématique

$(\overrightarrow{x_1}\,;\,\overrightarrow{x_3})=(\overrightarrow{z_1}\,;\,\overrightarrow{z_3})=\ \alpha$

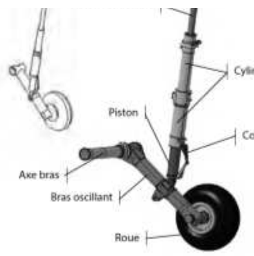
$(\overrightarrow{x_3}\,;\,\overrightarrow{x_4})=(\overrightarrow{z_3}\,;\,\overrightarrow{z_4})=\ \beta$

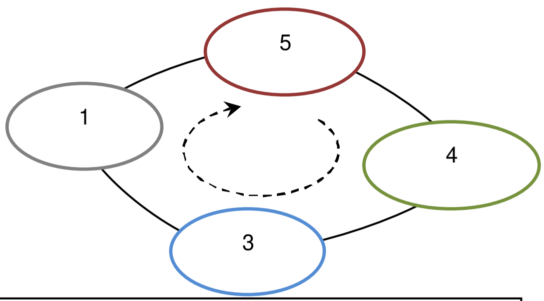
$(\overrightarrow{x_1};\overrightarrow{x_4})=(\overrightarrow{z_1};\overrightarrow{z_4})=\ \gamma$

$\overrightarrow{CD}=l\,\overrightarrow{x_5}$

$\overrightarrow{AC}=a\,\overrightarrow{x_3}\qquad \overrightarrow{CB}=b\,\overrightarrow{x_3}$

$\overrightarrow{AD}=c\,\overrightarrow{x_1}+\ d\,\overrightarrow{z_1}$





Graphe de structure du train d'atterrissage
Chaîne cinématique fermée

Méthode de résolution :

- ✓ **Fermeture géométrique en position** : **La relation de Chasles décompose le vecteur position $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (qui traduit le cycle)** en passant par les centres des liaisons successifs intervenant dans le cycle du mécanisme.

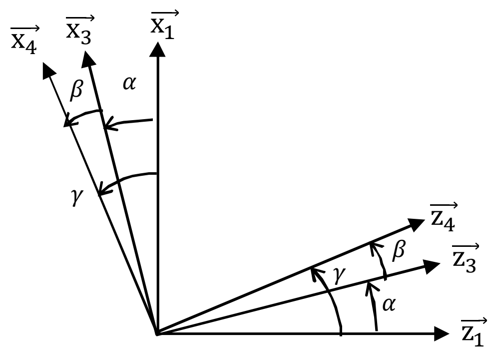
- ✓ **Fermeture géométrique angulaire :** à partir de l'angle $\overrightarrow{\alpha_{1/1}} = \vec{0}$ **(qui traduit le cycle), on écrit la composition des angles d'orientation** en utilisant les différents angles successifs.

Exemple pour le bras du véhicule

- $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
- $\overrightarrow{\alpha_{1/1}} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\alpha_{1/3}} + \overrightarrow{\alpha_{3/4}} + \overrightarrow{\alpha_{4/1}} = \vec{0}$

$$-\alpha.\overrightarrow{y_1} + -\beta.\overrightarrow{y_1} + \gamma.\overrightarrow{y_1} = \vec{0}$$

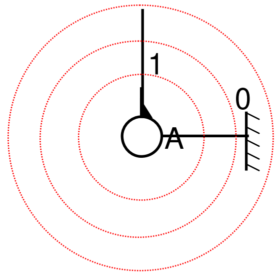
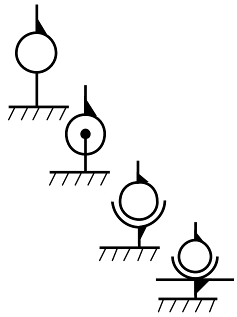
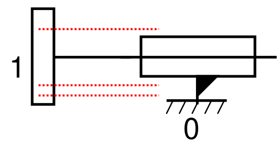
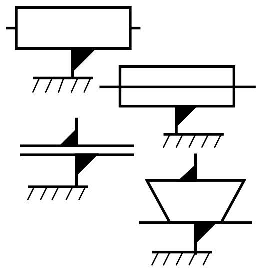
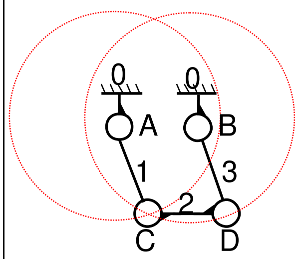
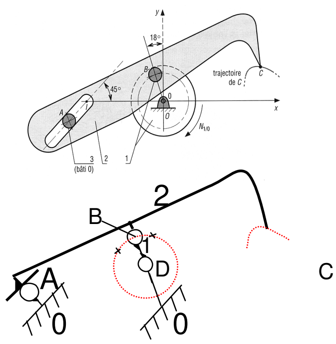
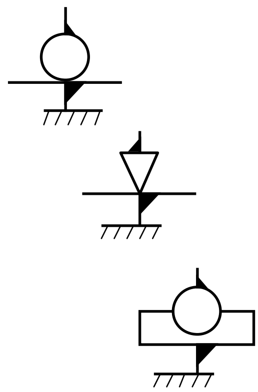
$$\gamma = \alpha + \beta$$



Méthode pour éliminer des paramètres du système d'équations afin d'obtenir la loi entrée-sortie (Système équations obtenues par projections des équations vectorielles de fermeture) :

1. Pour supprimer un paramètre de longueur $\boldsymbol{l}$: on met deux équations de projection sous la forme $\boldsymbol{l} = \cdots$ et on fait le rapport des deux équations.
2. Pour supprimer $\boldsymbol{\alpha}$: on met une équation de projection sous la forme $\cos(\alpha) = \cdots$ et l'autre sous la forme $sin(\alpha) =\ldots$ et on utilise la relation $\cos(\alpha)^2 + sin(\alpha)^2 = 1$
3. Dans d'autre cas on peut avoir à utiliser l'expression $tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ à partir des expressions $sin(\alpha) = \cdots$ et $cos(\alpha) = \cdots$

ANNEXE : Mouvements et trajectoires associées

Mouvements plans		Trajectoires		Liaisons (en problème plan)
Rotation autour d'un axe	le solide **tourne autour d'un axe fixe (A,$\vec{x}$)**	exemple : DVD 	Les trajectoires des points du solide sont des **cercles de même centre A**	
Translation	le solide reste toujours **parallèle à lui-même** (angle de rotation nul)	exemple : piston 	Les trajectoires des points du solide sont des **segments de droite parallèles** (translation rectiligne)	
		exemple : balançoire 	Les trajectoires des points du solide sont des **cercles de même dimension** (translation circulaire)	parallélogramme déformable (ou autres)
		Les trajectoires des différents points sont des **courbes identiques décalées les unes des autres** (translation quelconque)		sans liaison ou sur un plan fixe
Mouvement plan (quelconque)	le solide tourne autour d'un centre ***I* mobile au cours du temps**	exemple : griffe de caméra d'époque 	**Les trajectoires sont quelconques** (parallèles au plan pour un mouvement plan)	

Références : Mécanique du solide (applications industrielles) de P. Agati chez Dunod
Sciences industrielles pour l'ingénieur de G.Combari et J.Giraud chez Foucher
Sciences industrielles pour l'ingénieur de Patrick Beynet chez Ellipses