

<h1>Cours</h1>	<h2>CIN 2</h2>	TSI 1 Période 1-2
	Vitesses et accélération d'un solide	1h
	Cycle 3 : Cinématique	4 semaines

Analyser **Modéliser** Résoudre Expérimenter Réaliser Concevoir Communiquer

MODELISER

- Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
- Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique volumique.
- Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.

RESOUDRE

- Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique ou cinématique.
- Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
- Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

Le vecteur vitesse permet de quantifier les changements de position au cours du temps.

Il peut s'agir d'un changement de position:

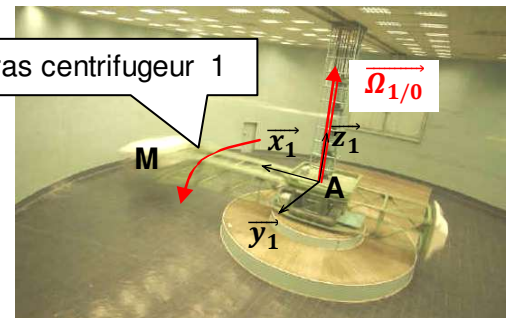
- angulaire d'un solide \rightarrow vitesse de rotation du solide
- d'un point du solide \rightarrow vitesse d'un point du solide.

1 Vitesse de rotation d'un solide

1.1 Vitesse de rotation autour d'un axe (A, \vec{z})

La vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$ du bras 1 par rapport au bâti 0 autour d'un axe (A, \vec{z}) a comme caractéristique :

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{z}_1$$



- vitesse de rotation (algébrique) $\Omega_{1/0}$ ou $\omega_{1/0}$ (en rad/s)
- $\frac{d\theta}{dt}$ ou $\dot{\theta}$: dérivée temporelle du paramètre angulaire θ de 1 par rapport à 0 (θ en rad)
Le signe dépend du sens de variation de l'angle : positif si sens direct ($\vec{x} \sim \vec{y} \sim \vec{z} \sim \vec{x} \dots$)
- \vec{z} : direction parallèle à l'axe de rotation.

Exemple : vitesse de rotation du bras centrifugeur 1 par rapport au bâti 0 : $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1$

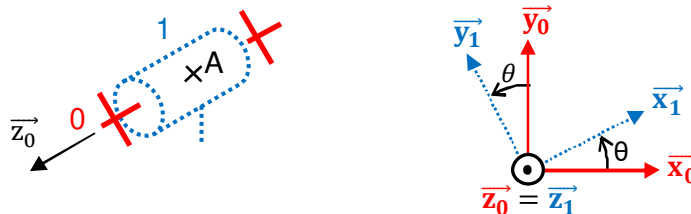
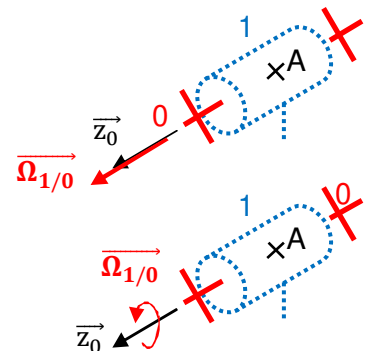


Figure plane pour une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) entre 0 et 1 avec $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Représentation graphique de $\vec{\Omega}_{1/0}$

- flèche tracée sur l'axe de rotation dont le sens est celui du vecteur unitaire si $\omega_{1/0} > 0$.
- arc de cercle orienté dans le sens du mouvement.



1.2 Composition des vitesses de rotation

Lorsque plusieurs paramètres angulaires interviennent, l'expression de $\overrightarrow{\Omega}_{n/0}$ s'obtient par la composition des vitesses de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \overrightarrow{\Omega}_{3/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \sum_{i=1}^3 \dot{\theta}_i \cdot \vec{e}_i$$

où θ_i sont les paramètres angulaires des rotations successives autour des axes de direction \vec{e}_i

2 Vitesse d'un point lié à un solide

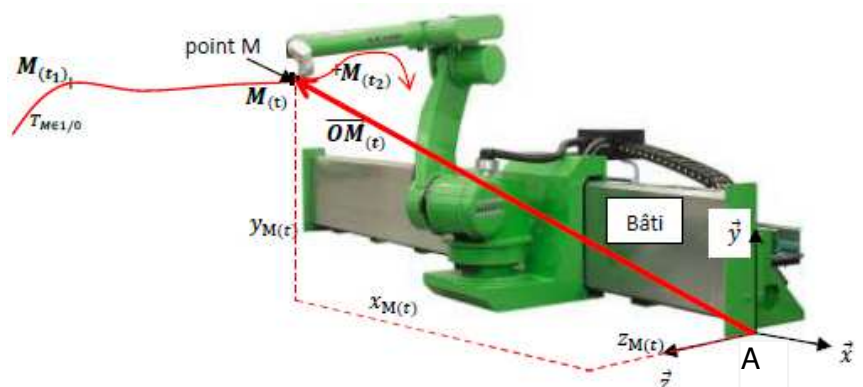
Le vecteur vitesse d'un point est **la dérivée temporelle du vecteur position de ce point, observé depuis un repère de référence.**

Exemple : Robot de peinture articulé

Le point $M_{(t)}$ est :

- en $M_{(t1)}$ à la date $(t1)$
- en $M_{(t2)}$ à la date $(t2)$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}_{(t)}$ noté \overrightarrow{AM} est le vecteur position du point M dans le repère R_0 car A est un point fixe de ce repère.



Le vecteur vitesse du point M (appartenant au solide $S1$) par rapport au repère R_0 est à la date (t) :

$$\overrightarrow{V}_{M \in 1/0} = \left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right]_0$$

où A est un point fixe (pas forcément l'origine) par rapport au repère de dérivation $R_0 = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

A tout instant, le **vecteur $\overrightarrow{V}_{M \in 1/0}$ (vitesse du point M)** est tangent à la trajectoire du point M vue du même référentiel 0 . Il se note indifféremment $\overrightarrow{V}_{M \in 1/0}$ ou $\overrightarrow{V}_{M,1/0}$.

2.1 Méthode 1 : calcul direct

Si le **repère de projection** du vecteur position $\overrightarrow{AM} = x_M \cdot \vec{x} + y_M \cdot \vec{y} + z_M \cdot \vec{z}$ est **le même que le repère de dérivation** ici $R_0 = (A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,

alors la vitesse s'obtient par **dérivation des différentes coordonnées** du vecteur position :

$$\overrightarrow{V}_{M \in 1/0} = \frac{dx_M}{dt} \cdot \vec{x} + \frac{dy_M}{dt} \cdot \vec{y} + \frac{dz_M}{dt} \cdot \vec{z} = \dot{x}_M \cdot \vec{x} + \dot{y}_M \cdot \vec{y} + \dot{z}_M \cdot \vec{z}$$

2.2 Méthode 2 : dérivation en base tournante

Si le **repère de projection** du vecteur position $\overrightarrow{AM} = x_M \cdot \overrightarrow{x_1} + y_M \cdot \overrightarrow{y_2}$ est **différent du repère de dérivation** ici $R_0 = (A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, alors il faut **dériver comme un produit de fonctions temporelles** les **coordonnées** et leur **vecteur unitaire respectif** (ne pas projeter ces vecteurs unitaires tournants dans R_0).

Cette méthode est à privilégier pour des bases tournantes car elle donne des expressions plus simples que le calcul direct qui nécessite une projection préalable dans la base fixe.

Exemple : vecteur position exprimé dans des repères différents de R_0 : $\overrightarrow{AM} = x_M \cdot \overrightarrow{x_1} + y_M \cdot \overrightarrow{y_2}$

Pour exprimer la vitesse $\overrightarrow{V_{M,1/0}}$ (par rapport au bâti 0), on doit dériver \overrightarrow{AM} dans la base R_0 comme des produits de fonctions : (coordonnée*vecteur_unitaire_respectif) :

$$\overrightarrow{V_{M,1/0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \right]_0 = \frac{dx_M}{dt} \cdot \overrightarrow{x_1} + x_M \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 + \frac{dy_M}{dt} \cdot \overrightarrow{y_2} + y_M \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_0$$

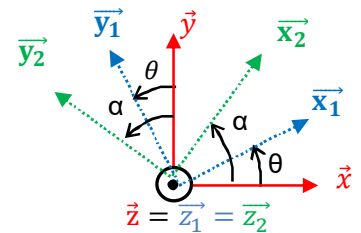
Formule de Bour pour un vecteur unitaire (dérivation d'un vecteur de base tournant) :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1}$$

Exemple :

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_1} \text{ la dérivée de } \overrightarrow{x_1} \text{ s'obtient par } \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \text{ la dérivée de } \overrightarrow{y_2} \text{ s'obtient par } \left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{y_2} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_2}$$



Méthode de calcul pour des vecteurs de base à partir des figures planes :

$$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y_1} = \sin(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{y_1}) \cdot \overrightarrow{z}$$

- **le vecteur \overrightarrow{z} est le vecteur de base normal aux vecteurs \overrightarrow{x} et $\overrightarrow{y_1}$,**
- $|\sin(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{x_1})| = \sin \theta$ lorsque les vecteurs sont reliés par un angle θ dans les figures planes
- $|\sin(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{y_1})| = \cos \theta$ s'il faut enlever ou ajouter $\pi/2$ à l'angle θ de la figure plane,
- **le signe devant le résultat est positif si l'angle pour aller de \overrightarrow{x} à $\overrightarrow{y_1}$ est dans le sens direct** (ce signe est à lire sur les figures planes).

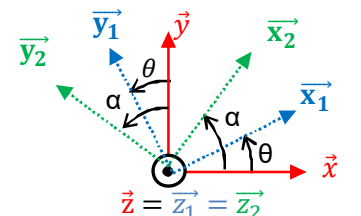
Exemple :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_2} = -\dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_2}$$

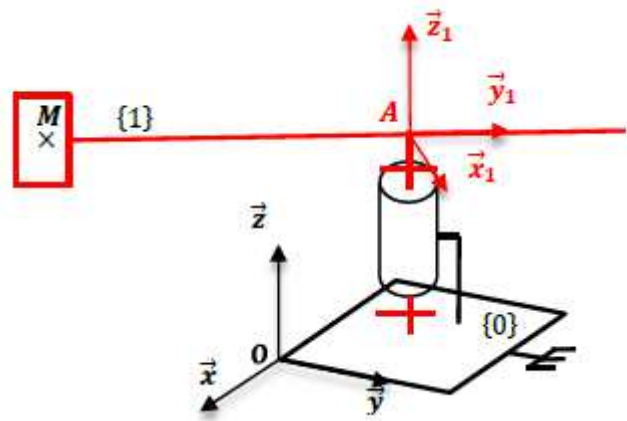
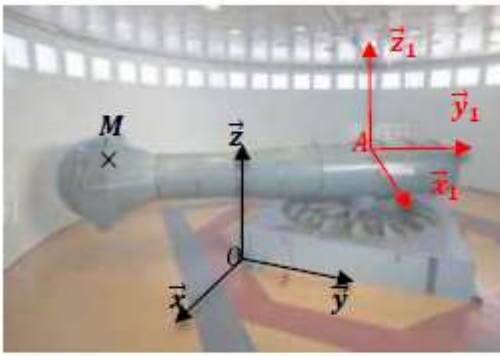
L'expression du vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\overrightarrow{V_{M,1/0}} = \dot{x}_M \cdot \overrightarrow{x_1} + x_M \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_1} + \dot{y}_M \cdot \overrightarrow{y_2} - y_M \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_2}$$



Penser à vérifier l'homogénéité car on oublie fréquemment un des éléments du produit qui a été dérivé.

2.3 Exemple : centrifugeuse TSF 18 (cité des étoiles Moscou)



Le repère d'observation est le repère terrestre $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Le rotor 1 est lié au repère $R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et son mouvement est paramétré par l'angle $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Paramétrage de position :

- $\vec{OA} = -a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y}$ $a = 5 \text{ m}$ $b = 8 \text{ m}$

- Le cosmonaute est localisé en M à une distance de $L = 18 \text{ m}$ de l'axe de rotation : $\vec{AM} = -L \cdot \vec{y}_1$

Problématique : quelle est la vitesse tangentielle de la cabine à la vitesse maximum de $38,6 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$?

Dérivations vectorielles

$\left[\frac{d(\vec{OA})}{dt} \right]_0 = \vec{0}$ car le vecteur \vec{OA} est fixe dans R_0 , on peut prendre indifféremment le point O ou le point A comme origine du vecteur position de M.

$$\vec{V}_{M \in 1/0} = \left[\frac{d(\vec{OM})}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(\vec{AM})}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(-L \cdot \vec{y}_1)}{dt} \right]_0 = -L \cdot \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0$$

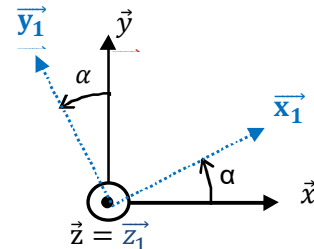
car L est constant (1 est indéformable : $\frac{dL}{dt} = 0$)

de plus par définition : $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}$

donc Bour permet d'écrire $\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\alpha} \cdot \vec{z} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1$

Enfinement : $\vec{V}_{M \in 1/0} = L \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_1$ (vecteur orthoradial ou tangentiel)

$$\|\vec{V}_{M \in 1/0}\| = L \cdot \dot{\alpha} = 18 * \frac{38,6}{60} * 2 * \pi = 72,8 \text{ m/s} = 262 \text{ km/h}$$



2.4 Cas particulier d'une trajectoire rectiligne

Exemple : vitesse du nez A d'une voiture 1 en translation rectiligne $\vec{V}_{A,1/R} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d(x \cdot \vec{x})}{dt} \right)_R = \dot{x} \cdot \vec{x}$



Représentation graphique : le vecteur vitesse d'un point se représente par une flèche dirigée suivant la tangente à la trajectoire du point et de sens celui du vecteur unitaire correspondant si $\dot{x} > 0$.

(pour cet essai de franchissement du mur du son en voiture : $\dot{x} > 277 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 1000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$)

3 Accélération d'un point par rapport à un repère

On appelle accélération d'un point M du solide 1 par rapport à un repère R_0 , la dérivée temporelle du vecteur vitesse de ce point par rapport au repère R_0 :

$$\vec{a}_{M \in 1/0} = \left(\frac{d\vec{v}_{M \in 1/0}}{dt} \right)_0$$

Remarque : la même façon on définit l'accélération angulaire (qui n'a pas de notation spécifique) :

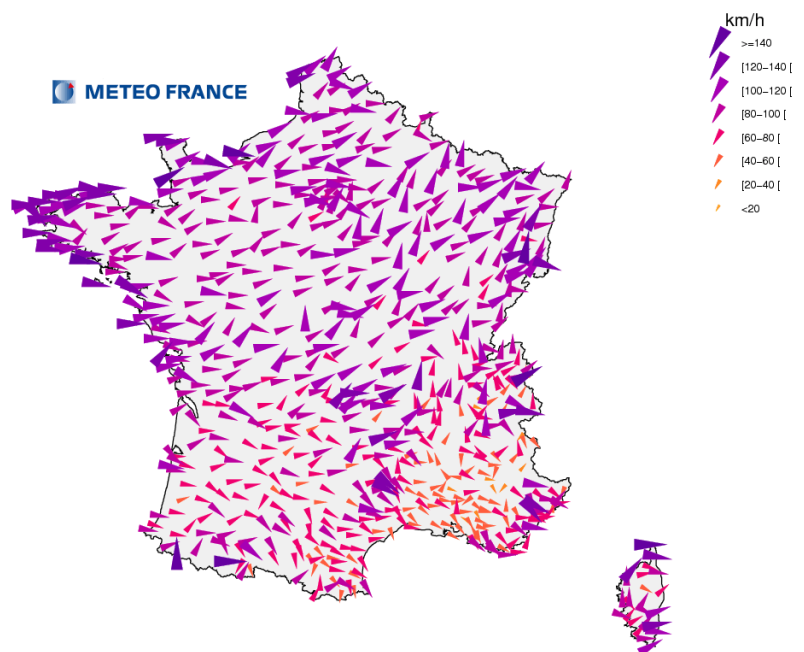
$$\vec{\dot{\Omega}}_{1/0} = \left(\frac{d\vec{\Omega}_{1/0}}{dt} \right)_0$$

4 Champ de vecteurs vitesses

Un champ est un modèle permettant de représenter sur une géométrie (ligne, surface et volume) une grandeur physique.

Exemple : prévisions météorologiques en températures (champ scalaire) ou en vents (champ vectoriel).

Figure 1 : Carte des vents maximaux
(8 et 9 février 2016)



Champ de vecteurs vitesses d'un solide indéformable

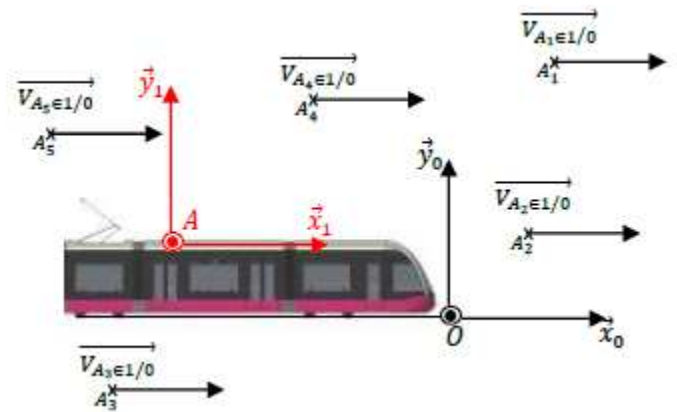
Le mouvement d'un solide 1 par rapport à R_0 génère un champ de vecteurs vitesses $\vec{v}_{A_n \in 1/0}$.

Les points A_n n'appartiennent pas nécessairement au solide 1, même si c'est souvent le cas en cinématique.

4.1 Cas particulier de la translation

Rappel : un solide S est en mouvement de translation si, $\forall A \in S$ et $\forall B \in S$, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{cte}$ (le solide reste parallèle à lui-même au cours du temps).

Exemple : Le tram 1 est en mouvement de translation rectiligne par rapport au sol de repère $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



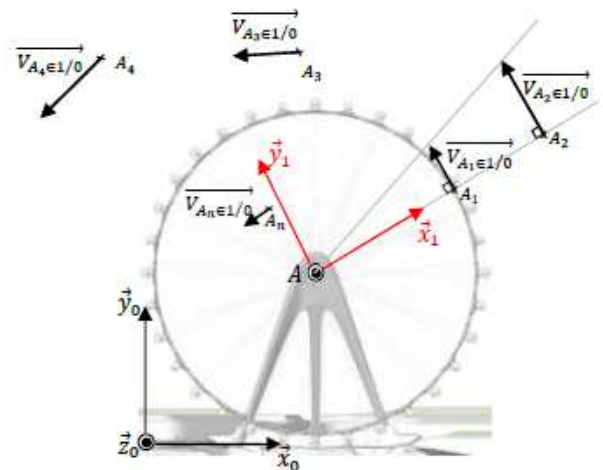
Pour un mouvement de translation : le champ des vecteurs vitesses est uniforme (même direction, même sens et même module pour la vitesse en tous points de l'espace).

4.2 Cas particulier de la rotation

La grande roue London Eye, solide 1, est en mouvement de rotation par rapport au sol, repère de référence $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Pour un mouvement de rotation, le champ des vecteurs vitesses peut être modélisé par un triangle des vitesses dont les cotés sont :

- rayon AA_n (où A est le centre de la rotation)
- vitesse $V_{A_n,1/0}$ et
- droite d'homothétie.



4.3 Champ des vecteurs vitesse d'un solide indéformable

Soient deux solides 1 et 0 auxquels sont rattachés les repères R_1 et R_0 .

Les points A et B d'un solide indéformable 1 étant liés par : $\|\overrightarrow{AB}\| = \mathbf{AB} = \text{constante}$, il en résulte une relation entre les vitesses appelée formule de Varignon (ou "formule du changement de point" ou encore "formule de distribution des vitesses") :

$$\text{Formule de Varignon : } \overrightarrow{V_{B,1/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

BABAR (mnémotechnique)

avec $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ vecteur rotation du solide 1 par rapport au repère R_0 ,

$\overrightarrow{V_{B,1/0}}$ est la vitesse du point B lié au solide 1 que l'on cherche à déterminer

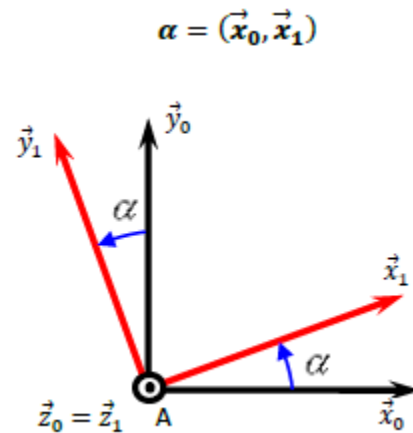
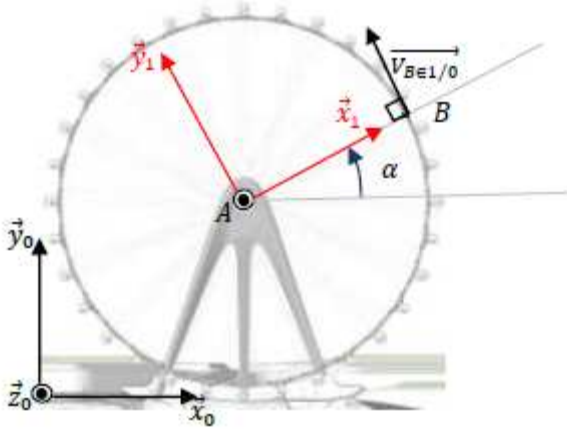
$\overrightarrow{V_{A,1/0}}$ est la vitesse du point A lié au solide 1 que l'on connaît

Cette expression sera notamment utilisée lorsque l'on cherche la vitesse en B connaissant la vitesse en A (vitesse nulle au centre d'une articulation avec le bâti par exemple).

4.4 Exemple d'application : London Eye

La grande roue installée sur les bords de la Tamise en 1999 porte le nom de Energy London Eye (135m : la plus grande d'Europe). La roue comporte 32 nacelles, qui peuvent embarquer environ vingt-cinq personnes. La rotation complète dure 30 minutes. Le mouvement des nacelles n'est pas étudié. Le rayon de la roue est noté $R = 58$ m.

Problématique : la vitesse permet-elle aux passagers d'embarquer sans arrêter la roue ?



Paramétrage de l'orientation de la base : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

1 : socle associé à $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

0 : bras de roue associé à $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Relation du champ de vecteurs vitesse :

$\vec{V}_{A,1/0} = \vec{0}$ car le point A est sur l'axe de la liaison pivot entre les solides 1 et 0

$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 = \omega_{1/0} \cdot \vec{z}_1$ vecteur rotation de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$\vec{BA} = R \cdot \vec{x}_1$ soit : $\vec{V}_{B,1/0} = -R \cdot \vec{x}_1 \wedge \omega_{1/0} \cdot \vec{z}_1 = R \cdot \omega_{1/0} \cdot \vec{y}_1$

AN : $V_{B,1/0} = -R \cdot \omega_{1/0} = 0,22$ m/s

4.5 Torseur de liaison

La liaison entre un solide 1 et un solide 2 peut être caractérisée par son torseur cinématique au centre de

$$\text{liaison A : } \left\{ \mathbf{V}_{1/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{A,1/0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + V_z \cdot \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

Les torseurs cinématiques associés aux liaisons sont donnés en annexe.

La vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ représente la rotation globale du solide indépendante du point A : $\vec{\Omega}$ est la **résultante** du torseur cinématique.

La vitesse du point \vec{V}_A , par définition dépend du point où l'on écrit le torseur cinématique : \vec{V}_A est le **moment en A** du torseur et l'expression de la vitesse en un autre point s'obtient par la formule de Varignon.

Les résolutions cinématiques utilisent peu les torseurs cinématiques des liaisons (parfois beaucoup de mobilités dans les liaisons) alors que le nombre de mouvements effectifs dans le mécanisme est réduit : on préfère partir du paramétrage des mouvements effectifs des solides.

5 Méthode de résolution

5.1 Structure ouverte

Dans le cas d'un mécanisme à structure ouverte, la **dérivation du vecteur position** est la méthode la plus efficace pour déterminer la vitesse en fin de structure ouverte en fonction des vitesses articulaires.

5.2 Structure fermée

Dans le cas d'un mécanisme bouclé et dans les cas où le mécanisme se réduit à un seul élément en rotation, le calcul des vitesses par la **formule de Varignon** est à préférer (elle est moins délicate à appliquer que la dérivation du vecteur position).

Le passage du mouvement d'un solide à un autre solide se fait par composition des vitesses :

La **composition des vitesses** pourra être écrite en s'appuyant sur un graphe de structure (ou sur les figures planes) et permet d'exprimer la relation entre les vitesses de plusieurs solides.

Pour les vitesses de rotation : $\overrightarrow{\Omega}_{1/n} = \overrightarrow{\Omega}_{1/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/3} + \dots + \overrightarrow{\Omega}_{n-1/n}$

Pour la vitesse d'un point A : $\vec{V}_{A,1/n} = \vec{V}_{A,1/2} + \vec{V}_{A,2/3} + \dots + \vec{V}_{A,(n-1)/n}$

La composition des vitesses permet également d'obtenir la loi d'entrée-sortie cinématique d'un mécanisme à boucle fermée.

On appelle alors cette relation la **fermeture cinématique** (elle est aussi vraie entre torseurs cinématiques).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega}_{1/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/3} + \dots + \overrightarrow{\Omega}_{n-1/1} &= \vec{0} \\ \vec{V}_{A,1/2} + \vec{V}_{A,2/3} + \dots + \vec{V}_{A,(n-1)/1} &= \vec{0} \end{aligned}$$

↑
fermeture : début = fin
↑

Pour obtenir, la relation entre paramètres cinématiques d'entrée et de sortie, il est nécessaire de projeter ces équations sur le repère fixe (parfois sur un repère mobile que l'on vous indiquera).

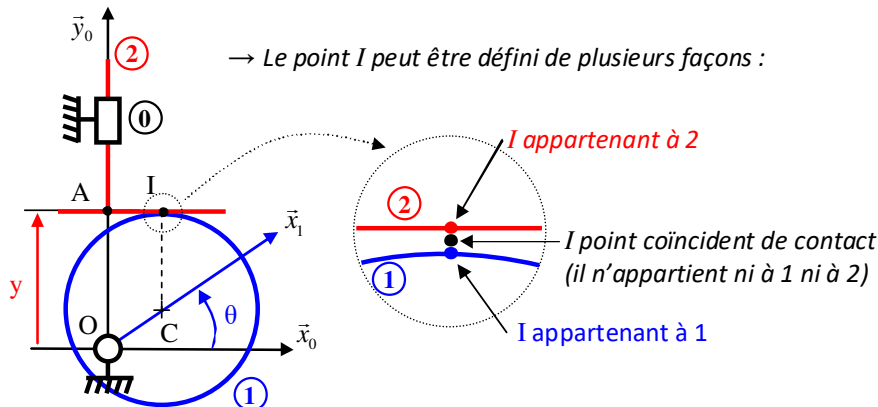
5.3 Vitesse de glissement du contact ponctuel (ou linéaire rectiligne)

La vitesse de glissement est la **vitesse relative entre des solides 1 et 2 en leur point contact** $\vec{V}_{I \in 2/1}$

Beaucoup de mécanismes font intervenir des conditions de roulement sans glissement (engrenage, roue sur le sol...) à vitesse de glissement nulle : $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$.

Afin d'établir la loi entrée-sortie d'un tel mécanisme ou pour obtenir la vitesse de glissement au contact, on utilise la composition des vitesses.

Exemple : pompe à piston 2 entraînée par un excentrique 1.



La vitesse de glissement ne s'obtient en **AUCUN CAS** par dérivation du vecteur position \vec{OI} car en I coïncident plusieurs points de trajectoires différentes :

- $T_{I \in 1/0} = \text{cercle } (C, CI)$,
- $T_{I \in 2/0} = \text{segment de droite } (I, \vec{y}_0)$,
- $T_{I \in 2/1} = \text{segment de droite } (I, \vec{x}_0)$.

Méthode de détermination de la vitesse de glissement $\vec{V}_{I,2/1}$

a) Composition des vitesses

La vitesse au glissement $\vec{V}_{I,2/1}$ s'exprime en fonction des vitesses absolues par la composition des vitesses : $\vec{V}_{I,2/1} = \vec{V}_{I,2/0} + \vec{V}_{I,0/1} = \vec{V}_{I,2/0} - \vec{V}_{I,1/0}$

b) Formule de Varignon

On utilise la formule de Varignon pour calculer les 2 vitesses absolues (par rapport à 0) en s'éloignant du point I qui est un point délicat :

$$- \vec{V}_{I,2/0} = \vec{V}_{A,2/0} + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} \quad \text{avec } \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0}$$

$$\text{soit } \vec{V}_{I,2/0} = \vec{V}_{A,2/0} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_0 = \left(\frac{d(y \cdot \vec{y}_0)}{dt} \right)_0 = \dot{y} \cdot \vec{y}_0$$

$$- \vec{V}_{I,1/0} = \vec{V}_{O,1/0} + \vec{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \quad \text{avec } \vec{V}_{O,1/0} = \vec{0}, \quad \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{IO} = \vec{IC} + \vec{CO} = -R \cdot \vec{y}_0 - e \cdot \vec{x}_1$$

$$\text{soit } \vec{V}_{I,1/0} = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_0 + e \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$$

On en déduit que $\vec{V}_{I,2/1} = \vec{V}_{I,2/0} - \vec{V}_{I,1/0} = \dot{y} \cdot \vec{y}_0 + R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_0 - e \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$

La vitesse de glissement étant horizontale (parallèle à la trajectoire), on obtient :

➤ la vitesse de glissement par projection sur \vec{x}_0 : $\vec{V}_{I,2/1} \cdot \vec{x}_0 = R \cdot \dot{\theta} + e \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta}$,

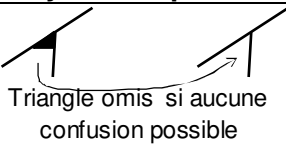
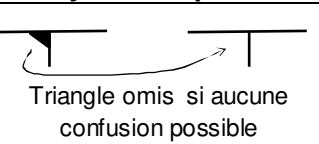
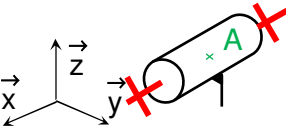
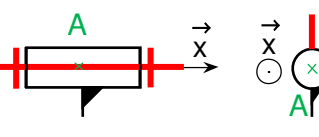
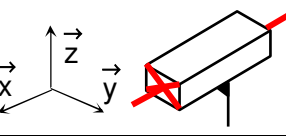
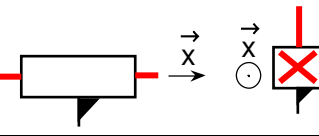
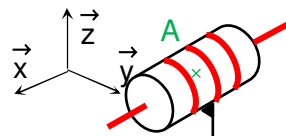
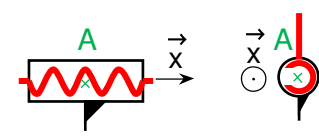
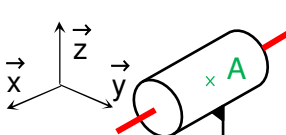
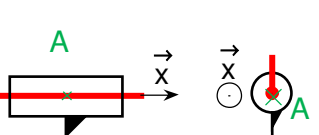
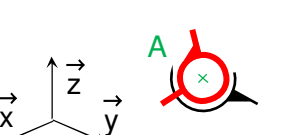
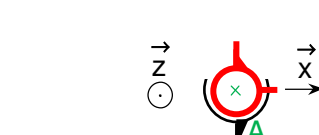
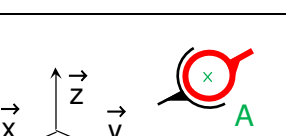
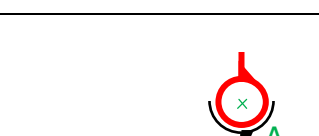
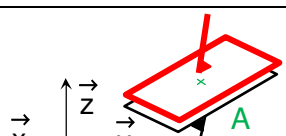
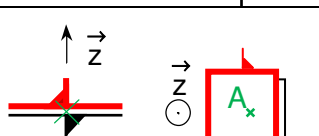
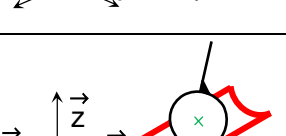
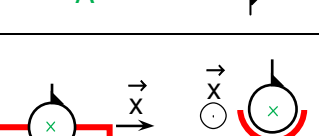


➤ la loi entrée-sortie par projection sur \vec{y}_0 : $\vec{V}_{I,2/1} \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}$ soit $\dot{y} - e \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = 0$

Références : CPGE TSI Eiffel Dijon Denis Guérin

Sciences industrielles pour l'ingénieur de G.Combari et J.Giraud chez Foucher

Sciences industrielles pour l'ingénieur de Patrick Beynet chez Ellipses

Annexe : Torseurs cinématiques

Liaison	Repère local	Torseur cinématique	Symbole spatial	Symboles plans
Encastrement (complète)	Quelconque	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$		
Pivot	axe (A, \vec{x}) A sur axe de rotation $\vec{x} \parallel$ axe de rotation	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$		
Glissière	direction \vec{x} \vec{x} : direction translation	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_x \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}_A$		
Hélicoïdale	axe (A, \vec{x}) A sur axe de rotation $\vec{x} \parallel$ axe de rotation p : pas de la vis à droite (sinon signe -) $\frac{V_x \cdot \vec{x}}{p} = \frac{\omega_x}{2 \cdot \pi}$	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} \\ V_x \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}_A$		
Pivot glissant	axe (A, \vec{x}) A sur axe de rotation $\vec{x} \parallel$ axe de rotation	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$		
Sphérique à doigt (rotule à doigt)	Axe (A, \vec{y}) A: centre des rotations \vec{y} : axe rotation bloquée	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + \vec{0} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$		
Sphérique (rotule)	Centre A A: centre des rotations	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$		
Appui-plan	normale (A, \vec{z}) A : quelconque $\vec{z} \perp$ plan de contact	$\begin{Bmatrix} 0 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$		
Sphère cylindre (linéaire annulaire)	axe (A, \vec{x}) A: centre des rotations \vec{x} : direction translation	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$		
Linéaire recti-ligne	axe (A, \vec{x}) normale (A, \vec{z}) A: sur ligne de contact $\vec{x} \parallel$ ligne de contact $\vec{z} \perp$ plan tangent	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$		
Sphère plan (ponctuelle)	normale (A, \vec{z}) A : centre du contact $\vec{z} \perp$ plan tangent	$\begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$	