

<h1>Cours</h1>	Cours ST 1	TSI1 (Période 4)
	Modélisation des actions mécaniques Principe Fondamental de la statique	1h
	Cycle 9 : Statique	4 semaines

Analyser **Modéliser** Résoudre Expérimenter Réaliser Concevoir Communiquer

MODELISER

- Réaliser l'inventaire des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur un solide ou un ensemble de solides
- Associer aux liaisons, un torseur d'action mécanique transmissible
- Associer un modèle à une action mécanique,

RESOUDRE

- Déterminer les inconnues de liaison
- Déterminer les paramètres conduisant à des positions d'équilibre

1 Introduction : Intérêt d'une étude Statique

Tout mécanisme est dimensionné pour pouvoir être utilisé pendant un temps donné au meilleur coût.

Or, la durée de vie d'une pièce dépend généralement :

- de l'environnement dans lequel elle se trouve,
- de ses dimensions,
- du matériau utilisé,
- mais aussi des actions appliquées sur celle-ci,

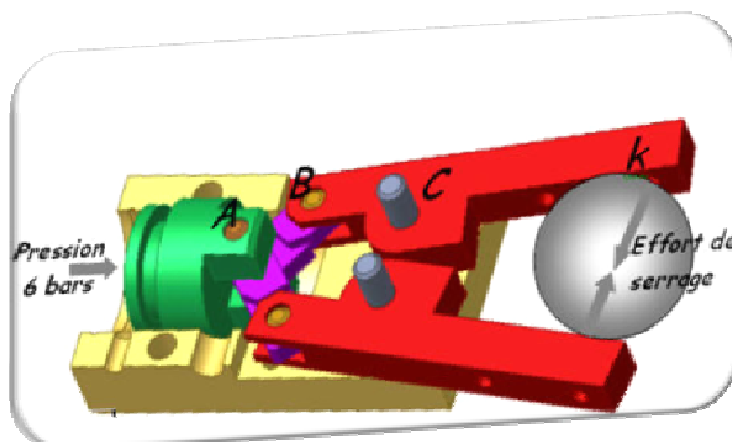
Ces actions peuvent être mesurées mais cela demande :

- la construction d'un prototype,
- la mise en place d'un laboratoire de mesure
- des délais importants

Il va donc falloir « **PRÉVOIR** » les actions appliquées sur un mécanisme en utilisant des modèles mathématiques et des lois physiques.

On commencera par une étude des Actions Mécaniques sur des systèmes qui ne bougent pas (statique). Le but de la statique est donc de déterminer les actions mécaniques s'exerçant sur un ensemble matériel en équilibre.

Exemple : déterminer l'effort de serrage en fonction de la pression d'alimentation

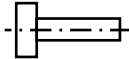



2 Action mécanique (définition)


On appelle **action mécanique** ce qui tend à déplacer, stopper ou déformer de la matière (gaz, liquide ou solide).

Exemples :


Actions de contact


Air ou huile sur un piston (fonctionnement en poussant) : 

Solide déformable (ressort) sur un solide indéformable 

Liaisons entre solides 

Actions à distance

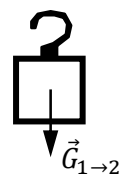
Attraction terrestre 

Attraction ou répulsion magnétique 

2.1 Résultante d'une action mécanique

La résultante d'une action mécanique d'un système 1 sur un système 2 traduit **la capacité de l'action mécanique à déplacer, stopper ou déformer le système 2 par translation.**

Notation : $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ ou $\vec{G}_{1 \rightarrow 2}$ en Newton (N)

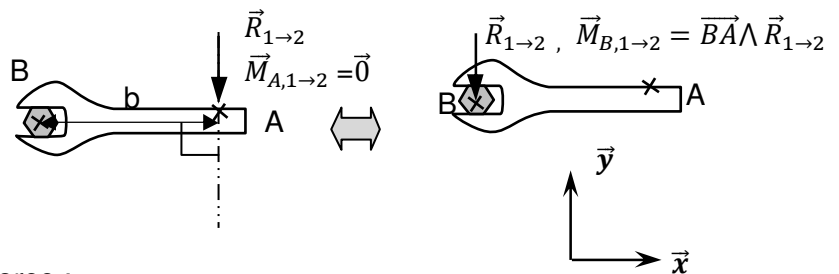
Exemple : poids 

2.2 Moment d'une action mécanique

Le moment d'une action mécanique d'un système 1 sur un système 2 traduit **la capacité de l'action mécanique à déplacer, stopper ou déformer le système 2 par rotation.**

Notation : $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}$ en Newton mètre (Nm)

Exemple : action d'un opérateur sur une clef



Il existe 2 façons de calculer le moment d'une force :

- le bras de levier b (identifié graphiquement) : $M_{B,1 \rightarrow 2} = \pm b \cdot R_{1 \rightarrow 2}$
- la formule de changement de point de Varignon : $\vec{M}_{B,1 \rightarrow 2} = \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow 2}$

2.3 Torseur d'une action mécanique ou torseur statique

Mathématiquement, un torseur est un champ de moment vérifiant la formule de changement de point :

$$\vec{M}_{B,1\rightarrow 2} = \vec{M}_{A,1\rightarrow 2} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1\rightarrow 2} \quad \text{où } \vec{R}_{1\rightarrow 2} \text{ est un invariant spatial appelé la résultante.}$$

En pratique, le torseur d'une action mécanique (torseur statique) sera représenté sous forme d'un tableau regroupant la résultante et le moment de l'action mécanique.

- en colonnes : $\{T_{1\rightarrow 2}\} = \{\vec{R}_{1\rightarrow 2} | \vec{M}_{A,1\rightarrow 2}\}_A = \begin{pmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{pmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$
- en lignes : $\{T_{1\rightarrow 2}\} = \begin{pmatrix} \vec{R}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A,1\rightarrow 2} \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} X_{12} & Y_{12} & Z_{12} \\ L_{12} & M_{12} & N_{12} \end{pmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$

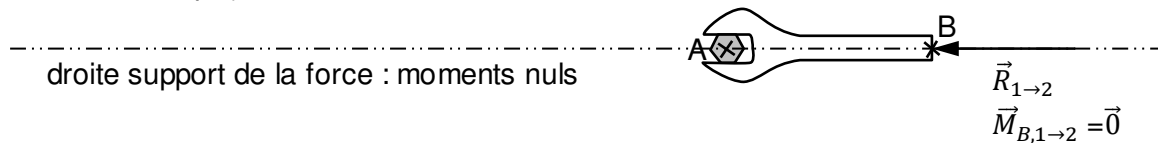
2.4 Actions mécaniques particulières

2.4.1 Force ou glisseur

On appelle **force (ou glisseur)** une action mécanique dont le **moment est nul en un point** (le moment est alors perpendiculaire à la résultante en tous points).

Notation : par abus la résultante s'appelle alors souvent $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$

En pratique le moment est nul sur l'ensemble des points de l'axe central du torseur à savoir en tout point de la droite support de la résultante (droite parallèle à la résultante et passant par le point d'application de l'action mécanique).



Exemple : poids au centre de gravité, ressort de traction au centre du contact avec le solide sur lequel il agit...

Propriété : d'après la formule de Varignon, on montre qu'un torseur est une force si et seulement si sa résultante est perpendiculaire à son moment.

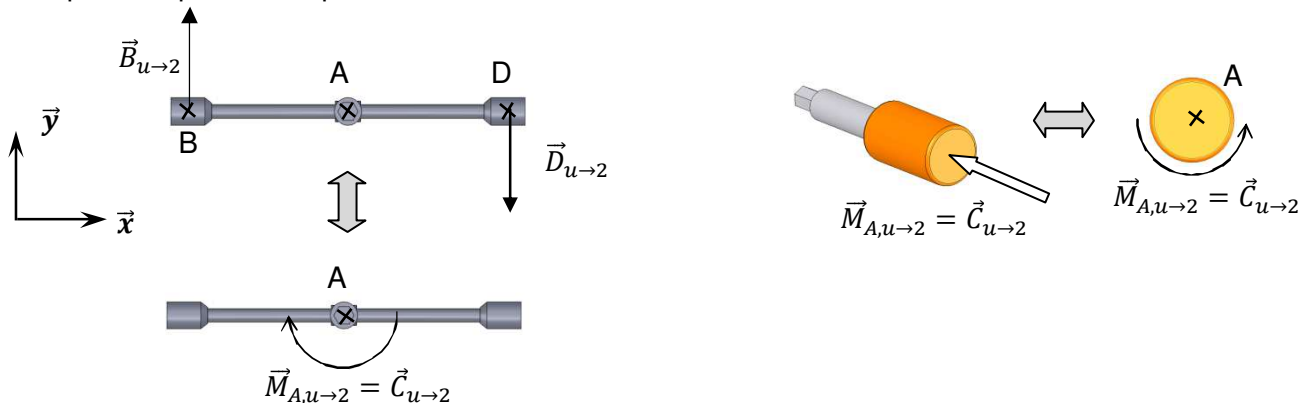
2.4.2 Couple

On appelle **couple** une action mécanique **dont la résultante est nulle**.

Le moment devient alors invariant spatial et pourra être noté par abus de notation

$$\vec{C}_{1\rightarrow 2} \text{ ou } \vec{T}_{1\rightarrow 2} \text{ (torque en anglais)}$$

Exemple : couple exercé par l'utilisateur sur une clé, un tournevis, moteur.



2.4.3 Actions de liaison

Les actions de liaisons ont pour fonction de limiter les déplacements autorisés entre pièces.

Le torseur des actions mécaniques d'une liaison d'un solide 1 sur un solide 2 représente les efforts qui peuvent être transmis (résultante et moment transmissibles) du solide 1 au solide 2

La plupart des mécanismes peuvent être modélisés avec les hypothèses suivantes.

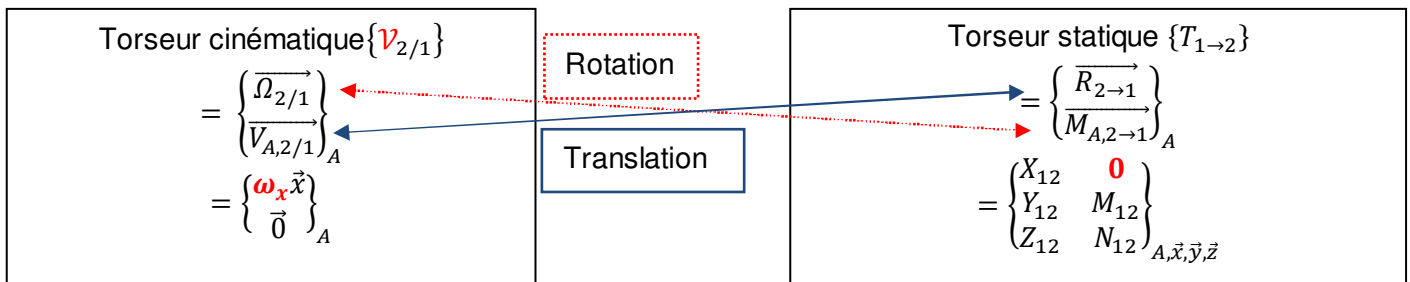
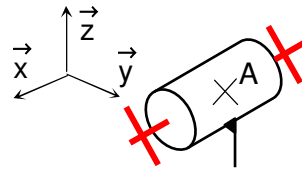
Hypothèses des liaisons parfaites:

- géométries parfaites,
- pas de jeu dans les liaisons,
- pas de frottement entre pièces.

Dualité composantes des torseurs statique et cinématique

Dans le cas de liaisons parfaites, les composantes nulles du torseur statique (torseur des actions transmissibles) sont exactement l'inverse des mouvements autorisés.

Exemple pour une liaison pivot d'axe (A, \vec{x})



2.4.4 Actions motrices

Les actions motrices ont pour effet de contrôler les déplacements des pièces et sont en général à la source des déséquilibres.

Il s'agit des actions dues à la pesanteur, à un ressort, à la pression de fluides ou aux actions magnétiques (forces de Lorentz ou forces de Laplace).

Dualité composantes du torseur statique / mobilités

Dans le cas de ces actions motrices, les déplacements qui tendent à être provoqués sont dans la même direction que les actions mécaniques.

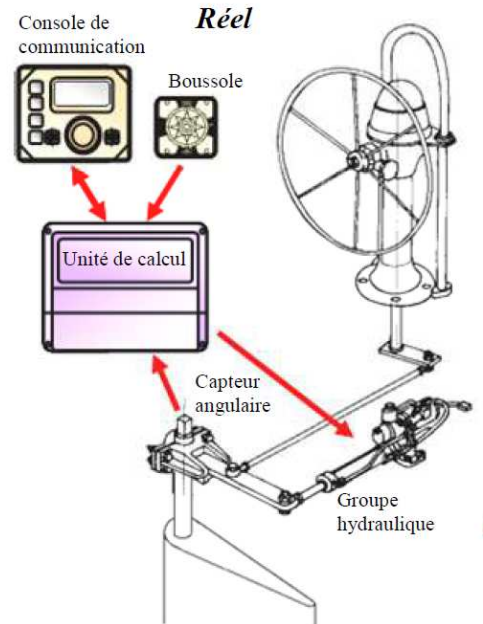
Nature du torseur d'actions motrices :

- ces actions mécaniques sont initialement des forces (voir annexe),
- le regroupement de ces forces peut engendrer des couples dans les moteurs notamment,
- il arrive plus rarement que l'action mécanique soit quelconque (défaut de symétrie des composants).

3 Modélisation des mécanismes

Afin de faciliter la résolution de l'équilibre des mécanismes, on va utiliser 3 types de schémas différents :

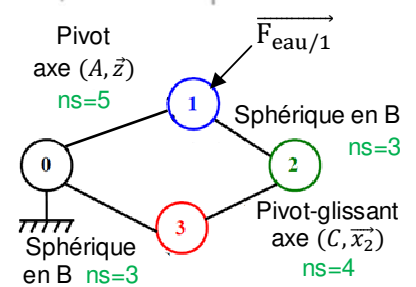
- le graphe des actions mécaniques,
- le schéma cinématique : utilisé pour une recherche de loi entrée/sortie en efforts,
- le schéma d'architecture : utilisé lors d'une recherche des actions dans les différentes zones de contact afin de dimensionner les composants de guidage (paliers, roulements) ou la forme des surfaces de contact.



3.1 Graphe des actions mécaniques

Ce graphe est un graphe de liaisons sur lequel on rajoute les actions qui ne sont pas des actions de liaisons entre solides indéformables (pesanteur, ressort, magnétique/moteur, fluide, utilisateur humain) ainsi que le bâti.

Ce graphe permet d'avoir une vue d'ensemble des inconnues du problème statique et permet de choisir l'ordre des isolements nécessaire à la résolution.

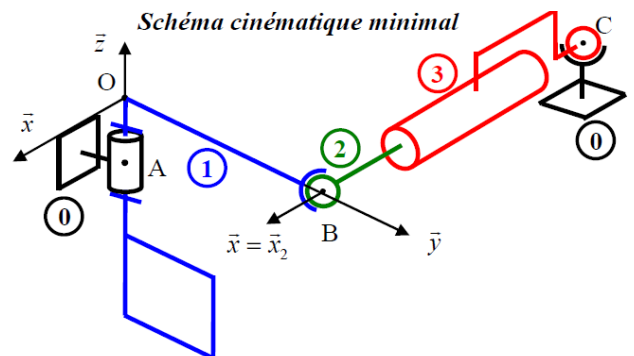


3.2 Schéma cinématique (minimal)

La procédure de tracé est celle vue dans le cours sur les schémas cinématiques.

Le schéma cinématique permet de :

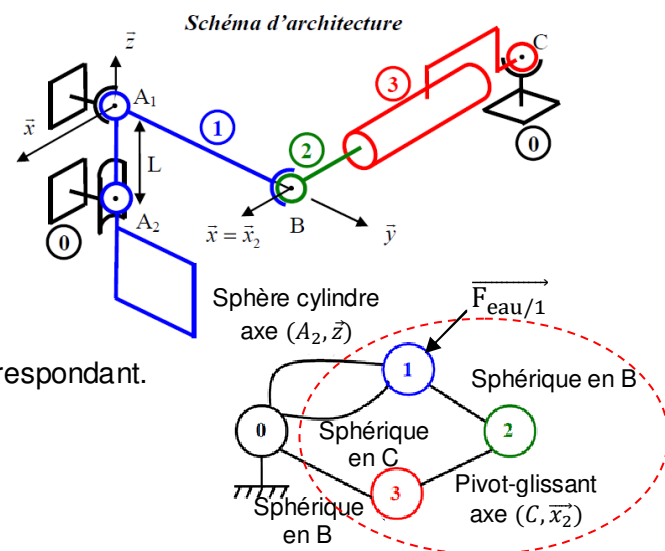
- donner une représentation schématique du mécanisme,
- choisir les projections utiles à la recherche des lois d'entrée/sortie.



3.3 Schéma d'architecture

Le schéma d'architecture est un schéma cinématique non minimal: plusieurs liaisons peuvent relier 2 ensembles cinématiques.

Le schéma architectural permet notamment de définir par des liaisons chacune des zones de contact du guidage que l'on souhaite étudier. Cela permet notamment de quantifier les actions mécaniques au niveau des zones de contact ou de dimensionner les composants de guidage correspondant.



4 Méthodes de résolution

L'objectif de la résolution d'un problème de statique est :

- établir la loi entrée/sortie du mécanisme (choix d'un système de freinage ou d'un actionneur),
- déterminer les actions de liaison (choix des composants de guidage).

4.1 Théorème des actions mutuelles

Deux actions réciproques sont opposées : $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = -\{T_{2 \rightarrow 1}\}$

4.2 Condition d'équilibre

Un système est en équilibre s'il est immobile (ou s'il se déplace en translation rectiligne uniforme) par rapport à un repère fixe ou absolu. Dans la mécanique newtonienne, ce repère est dit galiléen.

Pour l'étude des systèmes de notre environnement, un repère lié à la terre sera admis comme étant galiléen.

4.3 Bilan des actions mécaniques extérieures BAME

Avant de commencer la résolution d'un équilibre, il faut isoler un système (extraction mentale du mécanisme) et effectuer le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures BAME = **inventaire** de toutes les actions mécaniques extérieures agissant sur l'élément isolé.

Méthodologie :

- Ajouter sur le graphe de structure les actions mécaniques autre que celles engendrée par les liaisons (gravité, couple moteur, action d'un ressort, action d'un fluide...).
- Lister les actions mécaniques extérieures à la frontière de l'isolement
- Ne pas considérer les actions mécaniques intérieures
- Donner le torseur d'action mécanique de chaque action extérieure à l'isolement
- Exprimer les torseurs au même point (souvent là où l'on a le plus d'inconnues de résultantes).

4.4 Résolution de l'équilibre par les théorèmes généraux

Principe fondamental de la statique (PFS) :

À l'équilibre, la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures \bar{S} à un système S est nulle :

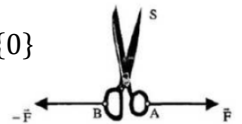
$$\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \{0\} \quad \text{ou} \quad \{T_{S_1 \rightarrow S}\} + \{T_{S_2 \rightarrow S}\} + \dots = \{0\}$$

Un système est en équilibre :

- si la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures auxquels il est soumis est nulle et
- si le système est immobile par rapport à un repère galiléen:

$\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \{0\}$ est une condition nécessaire d'équilibre mais non suffisante :

Le mécanisme sera à l'équilibre si tous ses ensembles cinématiques respectent $\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \{0\}$



Ce principe se décline en 2 théorèmes :

Théorème de la résultante statique appliqué à S : $\vec{R}_{\bar{S} \rightarrow S} = \vec{0}$ ou $\vec{R}_{S_1 \rightarrow S} + \vec{R}_{S_2 \rightarrow S} + \dots = \vec{0}$

Cela permet d'obtenir 3 équations scalaires par projection sur \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} .

Théorème du moment statique en A appliqué à S en A : $\vec{M}_{A, \bar{S} \rightarrow S} = \vec{0}$ ou $\vec{M}_{A, S_1 \rightarrow S} + \vec{M}_{A, S_2 \rightarrow S} + \dots = \vec{0}$

Cela permet d'obtenir également 3 équations scalaires par projection sur \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} .

La résolution du système d'équations correspondant permet de déterminer les inconnues de liaisons et les efforts que doit développer l'actionneur pour maintenir l'équilibre.

Pour le dimensionnement des actionneurs, on n'utilise que l'équation obtenue par la projection selon la mobilité du mécanisme.

4.5 Problème plan

Hypothèses d'un problème plan:

- la géométrie admet un plan de symétrie ou ses ensembles cinématiques ont un mouvement plan,
- les forces extérieures au système sont dans ce plan (ou symétriques par rapport à ce plan)
- les moments extérieurs au système sont orthogonaux à ce plan.

Beaucoup de mécanismes peuvent être étudiés dans le cadre des hypothèses précédentes et seront donc étudiées dans ce cadre.

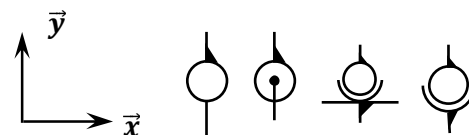
La conséquence d'un problème plan est de conclure à la nullité de 3 composantes parmi les 6 possibles des torseurs de liaison:

Problème plan (\vec{x}, \vec{y})	Problème plan (\vec{y}, \vec{z})	Problème plan (\vec{z}, \vec{x})
$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$

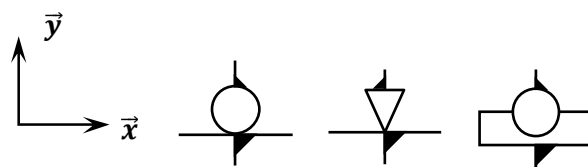
Ce résultat se superpose aux composantes nulles qui dépendent des liaisons.

Une fois la simplification de problème plan prise en compte, il n'y a plus de liens directs entre le torseur statique et le torseur cinématique.

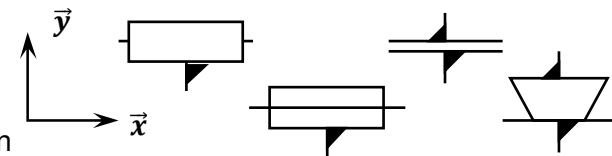
Cela donne dans le plan 3 types de torseurs différents dont la dénomination dans des logiciels de simulation plane peuvent être les suivantes :

"articulation" : $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$ 

bloque les translations mais autorise la rotation

"appui" (sur \vec{x} ou \vec{y}) : $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$ 

bloque seulement une translation

"glissière" (sur \vec{x} ou \vec{y}) : $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$ 

bloque une rotation et autorise une translation

"complète" : $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$

bloque toutes les mobilités

Références : Sciences industrielles pour l'ingénieur de Patrick Beynet chez Ellipse / Mécanique 1 de Pierre Agati Chez Dunod / <http://florestan.mathurin.free.fr> Construction mécanique de Michel Aublin chez Hachette