

<b>Cours</b>	<b>Cours ST 4</b>	<b>TSI1 (Période 4)</b>
	<b>Modélisation locale des actions mécaniques</b>	<b>30 min</b>
	<b>Cycle 9 : Statique</b>	<b>4 semaines</b>

**ANALYSER** Justifier le choix d'un matériau et/ou d'un procédé.  
**MODELISER** Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.  
**MODELISER** Modéliser une action mécanique.  
**CONCEVOIR** Dimensionner un composant des chaînes fonctionnelles.

## 1 Modélisation locale du contact sans frottement

Les actions surfaciques peuvent être celle d'un fluide (air, huile...) sur un solide ou celle d'un contact surfacique entre 2 solides.

### 1.1 Modèle local d'une action mécanique

Pour l'action d'un système 1 sur un système 2, la modélisation locale de l'action surfacique sur une surface élémentaire centrée sur M sera définie par la force élémentaire :

$$\overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2(M)}} = -p(M) \cdot ds \cdot \overrightarrow{n_{(M)}}$$

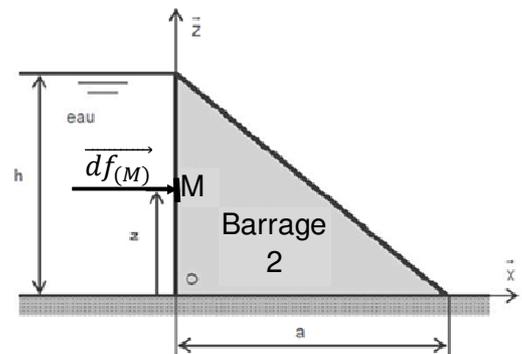
avec  $\overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2(M)}}$  : force élémentaire (en N) appliquée au point M sur la surface élémentaire  $ds$   
 $p(M)$  : la pression de contact au point M (en Pa),  
 $ds$  : une surface élémentaire (en  $m^2$ )  
 $\overrightarrow{n_{(M)}}$  : normale unitaire au point M dirigée vers l'extérieur de 2.

Exemple : pression de l'eau sur un barrage au point M.

La pression de l'eau du barrage augmente lorsque le point M se rapproche du fond ( $z=0$ ) :

$$p(M) = p_0 + \alpha \cdot (h - z)$$

Sur une surface élémentaire de la largeur du barrage  $L$  et de hauteur infinitésimale  $dz$ ,  $z$  varie peu donc  $p(M)$  est uniforme sur cette surface  $ds=L \cdot dz$ .



On peut ainsi définir la force élémentaire :  $\overrightarrow{df_{e \rightarrow 2(M)}} = -p(M) \cdot L \cdot dz \cdot (-\vec{x})$

Et finalement  $\overrightarrow{df_{e \rightarrow 2(M)}} = p(M) \cdot L \cdot dz \cdot \vec{x}$

On appelle **charge linéique**,  $\lambda(M)$  exprimée en  $N \cdot m^{-1}$ , une répartition de charge par unité de longueur. Autre expression de la force élémentaire :

$$\overrightarrow{df_{1 \rightarrow 2(M)}} = -\lambda(M) \cdot dl \cdot \overrightarrow{n_{(M)}}$$

où  $\lambda(M)$  est la charge linéique (en  $N \cdot m^{-1}$ )

$dl$  : une longueur élémentaire (en m).

$\overrightarrow{n_{(M)}}$  : normale unitaire au point M dirigée vers l'extérieur de 2.

Ce type de répartition se rencontre lorsque la pression n'évolue que selon une direction (cas fréquent).

Exemple : répartition linéique de charge de l'eau e sur le barrage :  $\lambda(M) = p(M) \cdot L$  associée à  $dz$ .

## 1.2 Relation entre le modèle local et le modèle global

Le modèle global s'obtient en sommant par intégration le modèle local sur toute la zone de contact :

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_S -\mathbf{p}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_{(\mathbf{M})} \cdot d\mathbf{s} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \int_S \vec{AM} \wedge (-\mathbf{p}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_{(\mathbf{M})}) \cdot d\mathbf{s} \end{array} \right\}_A$$

On reconnait dans ce torseur :

- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$  (en N) : la résultante (=somme) des forces élémentaires exercées par 1 sur 2,
- $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2}$  (en Nm) : le moment résultant (=somme) des forces élémentaires de 1 sur 2,
- $\vec{AM} \wedge (-\mathbf{p}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_{(\mathbf{M})})$  la formule de Varignon permettant de déterminer le moment en A de la force élémentaire  $(-\mathbf{p}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n}_{(\mathbf{M})})$  car par définition le moment de la force élémentaire est nul en M).

Exemple : calcul de la résultante de l'eau e sur le barrage 2

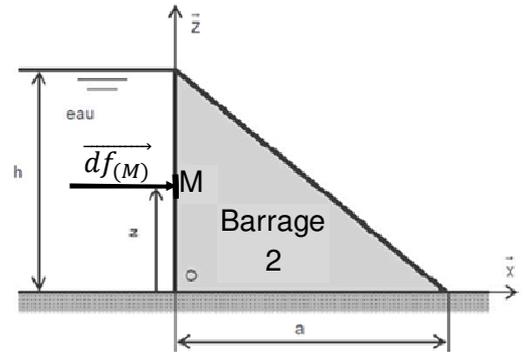
$$\vec{R}_{e \rightarrow 2} = \int_{z=0}^{z=h} (\mathbf{p}(\mathbf{M}) \cdot \vec{x}) \cdot (L \cdot dz)$$

Avec  $\vec{x}$  et L constants :

$$\vec{R}_{e \rightarrow 2} = \left( \int_{z=0}^{z=h} (p_0 + \alpha \cdot (h - z)) \cdot dz \right) \cdot L \cdot \vec{x}$$

$$\vec{R}_{e \rightarrow 2} = \left[ p_0 \cdot z - \alpha \left( hz - \frac{z^2}{2} \right) \right]_{z=0}^{z=h} \cdot L \cdot \vec{x}$$

$$\vec{R}_{e \rightarrow 2} = \left( p_0 \cdot h - \frac{\alpha h^2}{2} \right) L \vec{x}$$



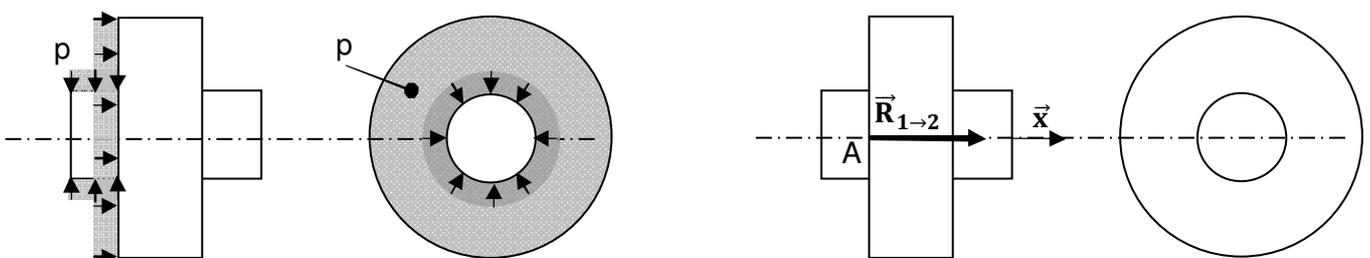
## 1.3 Centre de poussée et centre de liaison

**Le centre de poussée** (action d'un fluide) ou **le centre de liaison** (action d'un solide) est le point C tel que  $\vec{M}_{C,1 \rightarrow 2} = \vec{0}$ .

Pour une liaison pivot, le moment résultant du modèle local est nul en tous points de l'axe de rotation. Ce point n'existe pas toujours (pour une liaison glissière il n'y a pas de point où l'on puisse à priori définir un moment nul).

Exemple 1 : on montre que le moment de l'eau e sur le barrage 2 vaut  $\vec{M}_{C,e \rightarrow 2} = \vec{0}$  si  $\vec{OC} = \frac{h}{3} \cdot \vec{z}$

Exemple 2 : action de la pression p sur un piston 2 (la pression p est uniforme)



$$\{T_{p \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{p \rightarrow 2} = -p \cdot S \cdot \vec{x} \\ \vec{M}_{A,p \rightarrow 2} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

## 2 Pression de matage

Les liaisons à contact direct ou sur paliers lisses font intervenir la pression maximum au matage. La pression de matage conduit à une déformation permanente. Cette pression dépend notamment de la résistance maximum élastique  $R_e$  et des mouvements relatifs. Sa valeur fluctue donc de  $0,01.R_e$  à  $R_e$ . La résistance élastique  $R_e$  est de l'ordre de 200MPa à 500 MPa pour les aciers courants.

Contact entre pièces fixes	Pression admissible (en MPa)
Sur acier ou fonte sans matage	80 à 100
Sur acier ou fonte avec léger matage (ou sur béton)	200 à 250
Contact entre filets (ex.: vis d'assemblage)	15 à 30
Contact entre pièces mobiles	Pression admissible (en MPa)
Contact entre filets (mobiles en fonctionnement)	2 à 6
Articulation en porte-à-faux	0,5 à 8
Articulation en chape (ou fourchette)	1 à 25
Paliers rigides avec flexion de l'arbre; acier/fonte	1 à 1,5
Paliers à rotule, acier sur bronze à graissage intermittent	1,5 à 2,5
Paliers acier trempé/bronze; lubrification sur film d'huile	2,5 à 4

La détermination analytique de la pression maximum dépend notamment des hypothèses de répartition de la pression au contact et de l'intensité des actions à transmettre.

Seuls quelques cas peuvent être résolus analytiquement (voir la partie suivante).

## 3 Formulaire de pression au contact

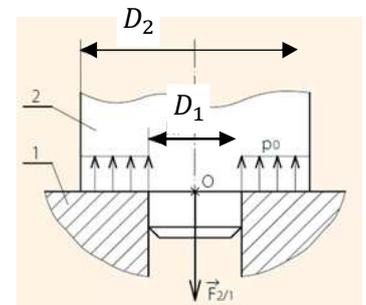
### 3.1 Répartition uniforme de la pression

Afin de simplifier le problème, on peut supposer que la pression est uniforme sur tout le contact. Cela est d'autant plus proche de la réalité que le jeu radial est nul (voire négatif : serrage radial).

#### 3.1.1 Disque de contact

C'est le cas très courant permettant d'obtenir la résultante des forces de pression  $p_0$  d'un fluide dans un vérin.

$$p_0 = \frac{\|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\|}{\pi(D_2^2 - D_1^2)/4}$$

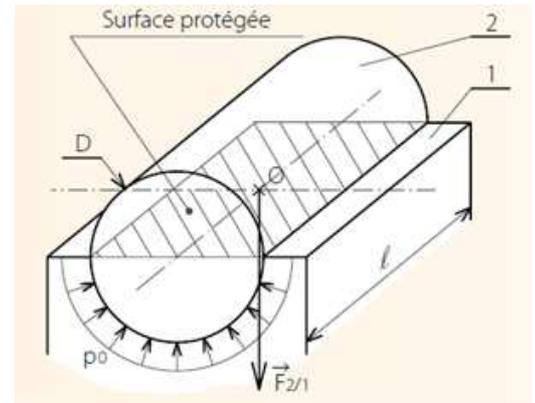


### 3.1.2 Surface cylindrique de contact sans jeu

Ce modèle est le modèle couramment utilisé par les constructeurs de paliers lisses.

#### Hypothèses :

- l'action à transmettre par le cylindre est une force de résultante  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  radiale centrée (les moments sont nuls au point O centre du cylindre),
- la liaison est sans jeu,
- la répartition de pression est uniforme sur le demi-cylindre en opposition à la force.



On appelle **pression spécifique** la pression obtenue par ce modèle :

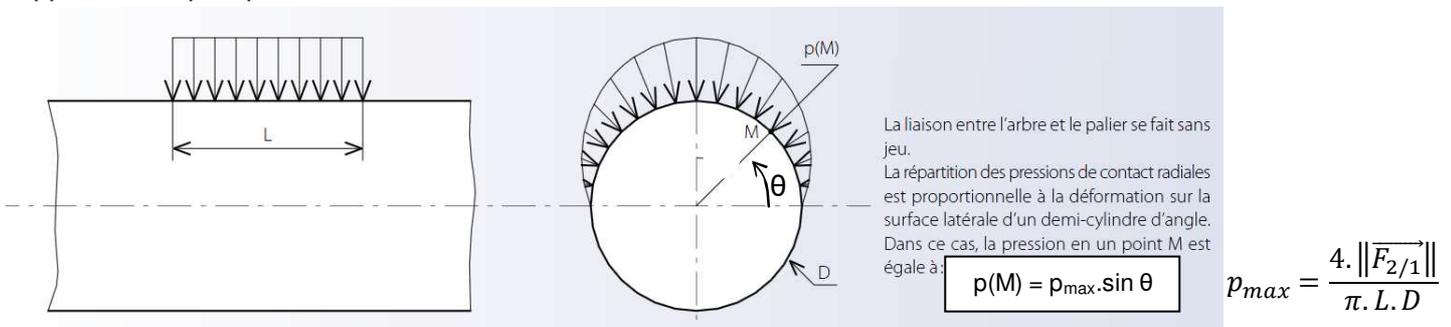
$$p_0 = \frac{\|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\|}{L \cdot D}$$

- où
- $p_0$  : la pression uniforme au contact (en Pa)
  - $\|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\|$  : norme de la force radiale centrée sur le palier (en N),
  - $L$  : longueur du demi-cylindre de contact (en m).
  - $D$  : diamètre du demi-cylindre de contact (en m).

$L \cdot D$  est appelée la **surface projetée** du cylindre.

### 3.2 Répartition sinusoïdale de la pression

Un autre modèle de répartition radiale des forces de pression est la répartition sinusoïdale qui se rapproche un peu plus de la réalité :



Le résultat est proche de la pression spécifique et en pratique c'est la pression spécifique qui est couramment utilisé.

## 4 Action mécanique à distance

Les actions mécaniques à distance sont les actions magnétiques et le poids.

Le modèle local de l'action de pesanteur fait intervenir la **masse volumique** qui dépend du matériau.

Exemples de masses volumiques :

$$\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{acier} = 7900 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{aluminium} = 2300 \text{ kg.m}^{-3}$$

### Hypothèses usuelles en S2I:

- Le solide S est presque toujours homogène donc  $\rho$  est uniforme.
- Le champ de gravité est uniforme (vrai tant que l'objet ne s'éloigne pas trop de la terre).

Le torseur du poids devient donc

$$\{T_{p \rightarrow s}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{p \rightarrow s} = m \cdot \vec{g} \\ \vec{M}_{G,p \rightarrow s} = \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad \text{avec} \quad m = \rho \cdot \mathcal{V}$$

où  $g$  : accélération de pesanteur (on prend souvent  $g=10 \text{ m.s}^{-2}$  ou  $9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .)

$m$  : la masse en kg du solide s,

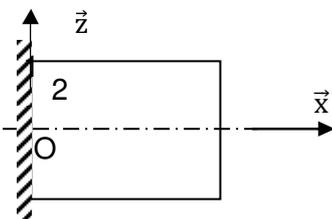
$\rho$  : la masse volumique du matériau (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ),

$\mathcal{V}$  : le volume du solide s (en  $\text{m}^3$ ),

G: centre de gravité tel que par définition  $\vec{M}_{G,p \rightarrow s} = \vec{0}$ .

Le volume est calculé par logiciel sauf pour les volumes simples rappelés en annexe.

**Exemple :** Torseur de pesanteur en O d'un cylindre 2 en acier de longueur  $L = 1 \text{ m}$  et de rayon  $r = 2 \text{ cm}$ .



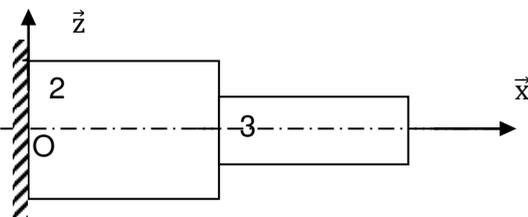
$$m = \rho_{acier} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot L = 7,9 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 0,02^2 \cdot 1 = 9,9 \text{ kg}$$

$$\{T_{p \rightarrow s}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{p \rightarrow s} = -99 \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_{G,p \rightarrow s} = \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad \text{et} \quad \vec{OG} = \frac{L}{2} \vec{x}$$

Par ailleurs lors de la recherche des coordonnées du centre de gravité G on pourra utiliser la relation du barycentre (pour n solides de centre de gravité  $G_i$  et masse  $M_i$  connues) :

$$\text{Barycentre : } M \cdot \vec{OG} = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \vec{OG}_i$$

**Exemple :** centre de gravité de l'ensemble  $S = \{2,3\}$  où 2 est en acier et 3 est en aluminium.



$$m_2 = 99 \text{ kg} \quad (\text{exemple précédent}) \quad \vec{OG}_2 = \frac{L}{2} \cdot \vec{x}$$

$$m_3 = \rho_{aluminium} \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot L = 2,3 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 0,01^2 \cdot 1 = 0,72 \text{ kg}$$

$$\vec{OG}_3 = 3 \frac{L}{2} \vec{x}$$

$$(m_2 + m_3) \cdot \vec{OG} = m_2 \vec{OG}_2 + m_3 \vec{OG}_3$$

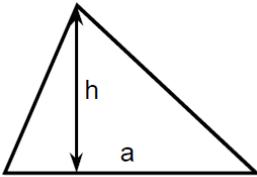
$$\text{soit} \quad \vec{OG} = \frac{1}{m_2 + m_3} \left( m_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \vec{x} + m_3 \cdot 3 \frac{L}{2} \vec{x} \right) = \frac{1}{m_2 + m_3} (m_2 + 3 \cdot m_3) \frac{L}{2} \vec{x} = 0,57 \vec{x}$$

Remarque : pour des barres profilées, on définit souvent une **masse linéique**  $\rho_l$  (en  $\text{kg.m}^{-1}$ ) à multiplier par la longueur de la barre pour obtenir sa masse.

## ANNEXE : Rappel sur les aires et volumes usuels

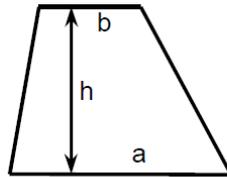
Aire des surfaces courantes :

Triangle



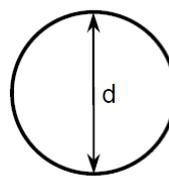
$$\text{Aire} = \frac{a \cdot h}{2}$$

Trapèze



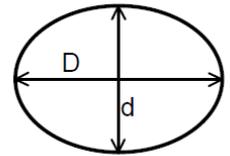
$$\text{Aire} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Cercle



$$\text{Aire} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \pi \cdot r^2$$

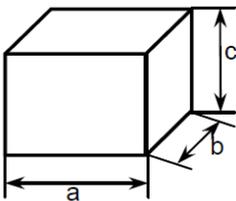
Ellipse



$$\text{Aire} = \frac{\pi \cdot D \cdot d}{4} = \pi \cdot R \cdot r$$

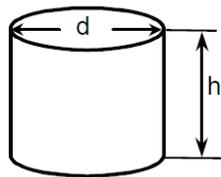
Aire et volume de solides courants :

Parallélépipède



$$\text{Volume} = a \cdot b \cdot c$$

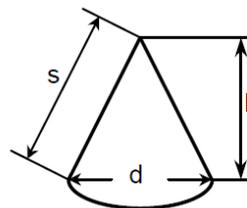
Cylindre



$$\text{Volume} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{4} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\text{Aire}_{\text{latérale}} = \pi \cdot d \cdot h = 2\pi \cdot r \cdot h$$

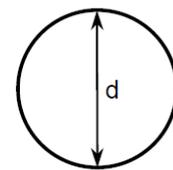
Cône



$$\text{Volume} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot h}{12} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$\text{Aire}_{\text{latérale}} = \frac{\pi \cdot d \cdot s}{2} = \pi \cdot r \cdot s$$

Sphère



$$\text{Volume} = \frac{\pi \cdot d^3}{6} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$$

$$\text{Aire}_{\text{totale}} = \pi \cdot d^2 = 4\pi \cdot r^2$$

**Références :**

Sciences industrielles pour l'ingénieur de Patrick Beynet chez Ellipse / Mécanique 1 de Pierre Agati Chez Dunod  
[http://florestan.mathurin.free.fr/PCSI/Cours\\_pdf/Cours22.pdf/](http://florestan.mathurin.free.fr/PCSI/Cours_pdf/Cours22.pdf/) <http://stephane.genouel.free.fr/>  
 Construction mécanique de Michel Aublin chez Hachette  
 Systèmes mécaniques (théorie et dimensionnement) de M. Aublin Edition Dunod  
 Technologie et formation n°117 et N°118 : article de B.Louarn et C.Teixido  
 Guide du calcul en mécanique D.Spenlé et R.Gourhant, Edition Hachette technique  
 Guide du dessinateur industriel de A.Chevalier; Edition Hachette technique