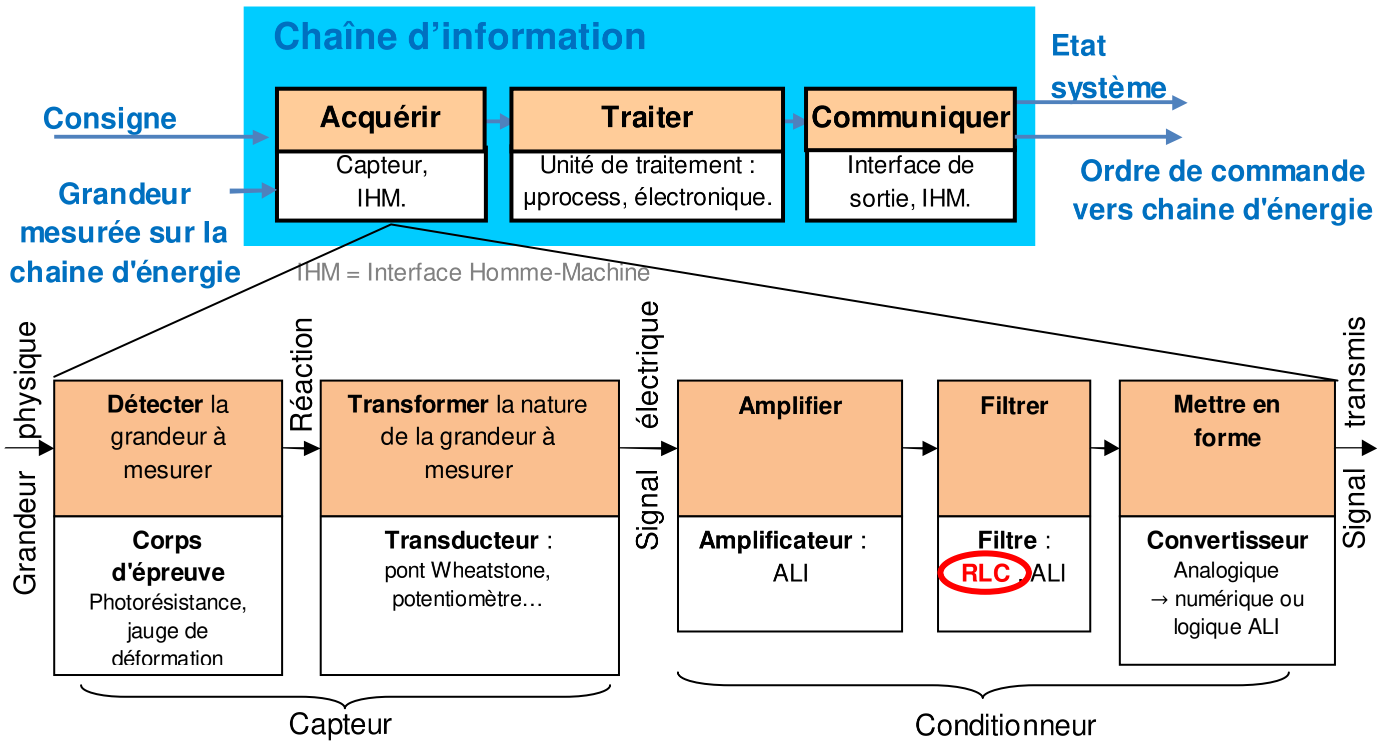
Cours	**Cours ACQ 3**	**TSI1 (Période 3)**
	Filtrage analogique	**1h**
	Cycle 8 : Acquérir Conditionner Traiter	4 semaines

ANALYSER Caractériser un constituant de la chaine d'information.
MODELISER Identifier les phénomènes physiques à modéliser.
RESOUDRE Déterminer les signaux électriques dans les circuits.
EXPERIMENTER Identifier les erreurs de mesure et de méthode.
CONCEVOIR Choisir la technologie des composants de la chaine d'information.

1 Fonction "filtrer"

Le filtrage est un conditionnement du signal, il a pour objectif :

- D'éliminer ou d'affaiblir des fréquences indésirables ;
- D'isoler dans un signal la ou les bandes de fréquences utiles (permet par exemple d'adapter le spectre de fréquences d'un signal à numériser à la fréquence d'échantillonnage du CAN : respect du théorème de Shannon $2.f_{max} \leq fe$).



On distingue différents types de filtrage :

- **Filtrage analogique** avec composants linéaires :
  - **filtres passifs** utilisant des composants discrets R, L et C ;
  - **filtres actifs** utilisant des composants discrets R, C et ALI (possibilité d'amplifier) ;
- **Filtrage numérique** avec composant programmable DSP (Digital Signal Processor : processeur de signal numérique) ;

Les méthodes de filtrage de ce cours permettent d'étudier le filtrage dans les systèmes d'acquisitions.
Ces méthodes s'appliquent également au filtrage des signaux de communication (téléphonie, réseaux…) et au filtrage des sources d'alimentation électrique des chaines d'énergie.

CC BY NC SA

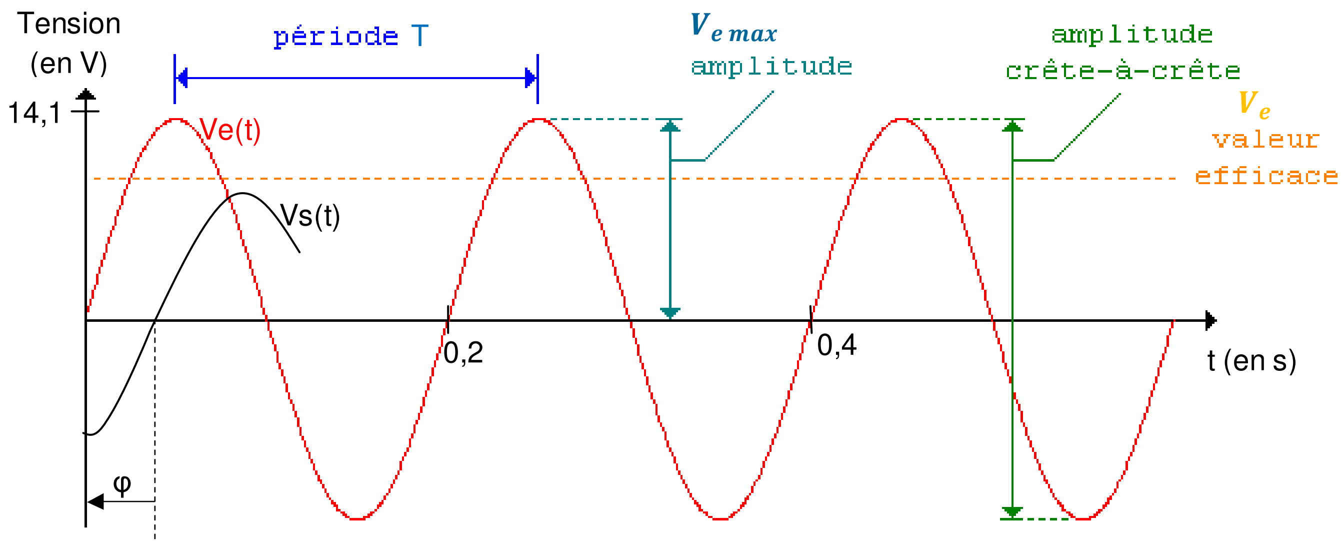
2 Caractéristiques d'un filtre et des signaux associés

2.1 Grandeurs d'entrée et de sortie du filtre

Un filtre sera vu comme un quadripôle qui admet :

- Une tension d'entrée Ve(t)
- Une tension de sortie Vs(t)

On montre que tout signal électrique périodique peut être décomposé à l'aide de signaux sinusoïdaux dont les caractéristiques sont les suivantes.



Paramètres caractéristiques d'un signal sinusoïdal :

- $\boldsymbol{V_e = V_{e\,max}/\sqrt{2}}$ **est la tension efficace** du signal sinusoïdal d'entrée $\boldsymbol{V_e(t)}$ d'amplitude $V_{e\,max}$.
  Pour le signal ci-dessus : $V_e = \frac{V_{emax}}{\sqrt{2}} = \frac{14{,}1}{\sqrt{2}} = 10\ V$

- **ω est la pulsation** et s'exprime en rad.s^{-1}, elle est reliée à la fréquence f par $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$ et f s'obtient par la période T : $\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$.
  Pour le signal ci-dessus : T = 0,2s donc f = 1/T = 50 Hz et ω = 2π50 = 628 rad/s.

On peut ainsi définir la tension d'entrée par l'expression temporelle : $\boldsymbol{V_e(t) = \sqrt{2}.V_e.sin(\omega.t)}$

Paramètres caractéristiques du filtre qui dépendent de la fréquence ou de la pulsation ω :

- **φ(ω) est le déphasage du filtre** donc de la sortie $\boldsymbol{V_s(t)}$ par rapport à l'entrée $\boldsymbol{V_e(t)}$ et s'exprime en rad (éventuellement en °).
  La mesure de φ sur le chronogramme précédent se fait en mesurant l'angle (fraction de la période 2π du sinus) permettant de ramener le signal de sortie $\boldsymbol{V_s(t)}$ en phase avec le signal $\boldsymbol{V_e(t)}$.
  Sur la figure précédente $\varphi(\omega) = \omega.\Delta t = \frac{2\pi}{T}.\Delta t = 2\pi.\frac{\Delta t}{T} \approx 2\pi\frac{-1}{6} = -\frac{2\pi}{6}$.

- $\boldsymbol{T(\omega) = \frac{V_s}{V_e}}$ **est l'amplification du filtre**. Cette amplification est sans unité.
  Pour la figure précédente $T(628) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{V_{smax}}{V_{emax}} = \frac{8}{14{,}1} = 0{,}57$

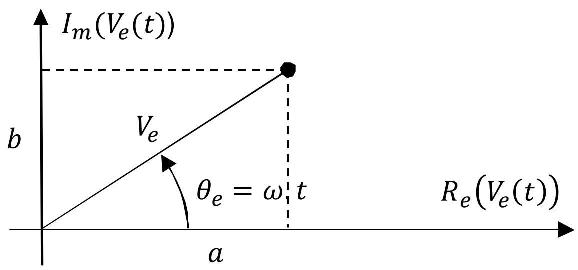
On peut ainsi définir la tension de sortie par l'expression temporelle : $\boldsymbol{V_s(t) = \sqrt{2}.V_e.T(\omega).sin(\omega t + \varphi(\omega))}$.

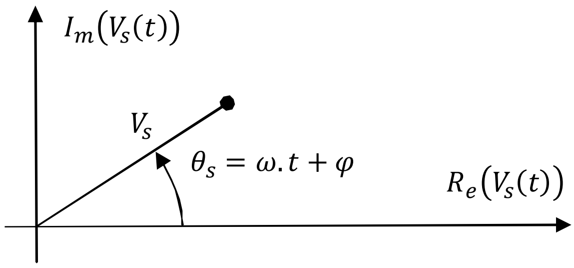
3 Modélisation d'un filtre

3.1 Notation complexe

Pour déterminer le comportement du filtre en fonction de la fréquence du signal d'entrée, il va être utile de définir l'expression des grandeurs d'entrée et de sortie avec les notations complexes.

Représentation de Ve(t) et Vs(t) dans le plan complexe :





On définit alors pour le nombre complexe $\underline{V_e}$:

- module de $\underline{V_e}$: $V_e = \left\| \underline{V_e} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- l'argument de $\underline{V_e}$: $\theta_e = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

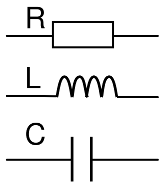
L'entrée peut ainsi être définie par l'une des 3 écritures suivantes :

$$\underline{V_e} = V_e.\cos(\theta_e) + j.V_e.\sin(\theta_e) = [V_e; \theta_e]$$

3.2 Impédances des dipôles utiles au filtrage

L'impédance (en Ω) des dipôles passifs soumis à des tensions ou des courants sinusoïdaux de pulsation ω est la suivante :

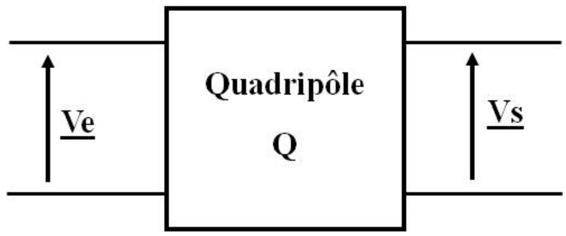
- Résistance : $\underline{Z_R} = R$
- Inductance : $\underline{Z_L} = jL\omega$
- Condensateur : $\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$



3.3 Transmittance du filtre

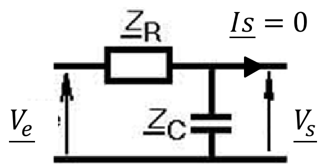
Les lois de Kirchhoff et les impédances des dipôles permettent de calculer la transmittance ou fonction de transfert T(jω) d'un quadripôle Q (ici le filtre) :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$$



Exemple : filtre RC passe-bas qui permet de :

- laisser passer les basses fréquences,
- réduire les hautes fréquences.



Hypothèse usuelle : $\underline{I_S} = 0$ (entrée d'un ALI)

Pont diviseur de tension : $\underline{V_s} = \underline{V_e}.\frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_c}}$

soit $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

Forme attendue : $$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{Numérateur}(j\omega)}{\underline{Dénominateur}(j\omega)}$$

- $\underline{Numérateur}(j\omega)$ et $\underline{Dénominateur}(j\omega)$ sont des polynômes en ω (ce sont aussi des nombres complexes).

Forme canonique :
Un polynôme est canonique si le coefficient non nul de sa plus petite puissance de ω vaut 1.

La forme canonique est recherchée lorsque le polynôme contient plusieurs puissances de ω.

Exemple : dénominateur canonique pour le filtre RC passe-bas :
$$\underline{Dénominateur}(j\omega) = 1 + jRC\omega = 1.\omega^0 + jRC\omega^1$$

3.4 Amplification et gain du filtre

L'amplification du filtre est le module de la transmittance :

$$T(\omega) = \left\|\underline{T}(j\omega)\right\| = \frac{\left\|\underline{Numérateur}(j\omega)\right\|}{\left\|\underline{Dénominateur}(j\omega)\right\|}$$

Exemple : amplification du filtre RC passe-bas :
$$T(\omega) = \frac{\|1\|}{\|1 + jRC\omega\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$$

Au lieu de travailler avec l'amplification, on préfère travailler avec le gain exprimé en décibel (dB) (historiquement, cette unité facilitait les calculs en télécommunication et 1dB correspond à la résolution de l'oreille humaine : plus petite variation audible de l'amplitude du son).

Le gain G est défini par $$\boldsymbol{G(\omega) = 20.log\left(\left\|\underline{T}(j\omega)\right\|\right)}$$

Exemple :

Ve(t) ⇒ **Amplification T** ⇒ Vs(t)

Amplification T = 100 → G = 40 dB
Amplification T = 1 → G = 0 dB
Amplification T = 0,1 → G = -20 dB

Généralisation :

- **Signal amplifié : T > 1 → G > 0,**
- **Signal conservé : T = 1 → G = 0,**
- **Signal atténué : T < 1 → G < 0.**

Remarque : l'opération inverse est possible

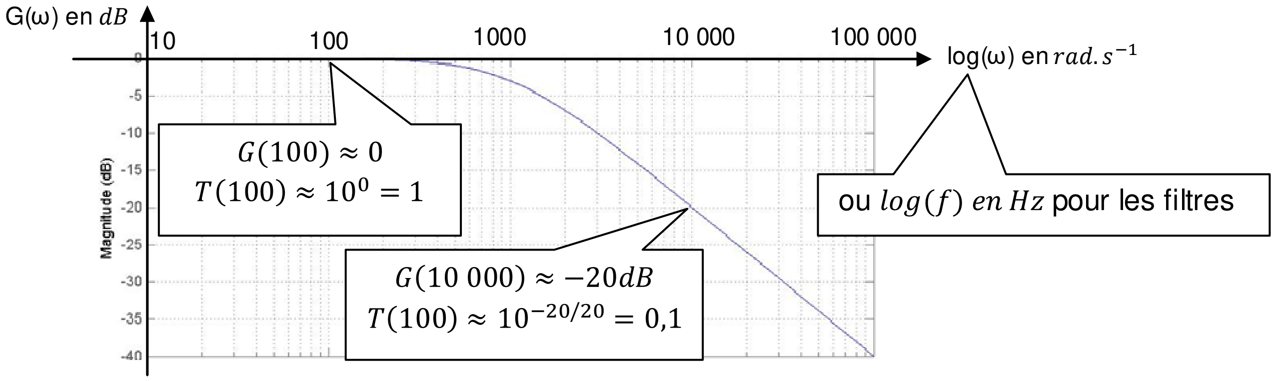
$$T(\omega) = 10^{G(\omega)/20}$$

3.5 Diagramme de Bode

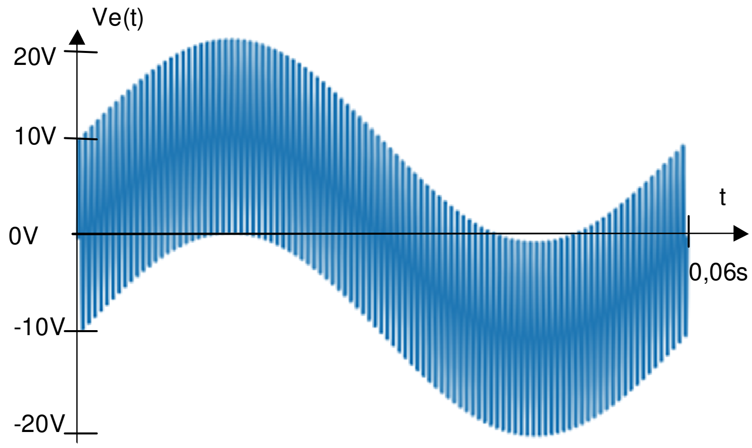
Le diagramme de Bode est une représentation graphique permettant de tracer les variations du gain G(ω) en fonction de la pulsation ω.
L'axe des abscisses logarithmique permet d'afficher une grande plage de fréquences.

On utilise des outils de tracés numériques pour obtenir la courbe du gain.

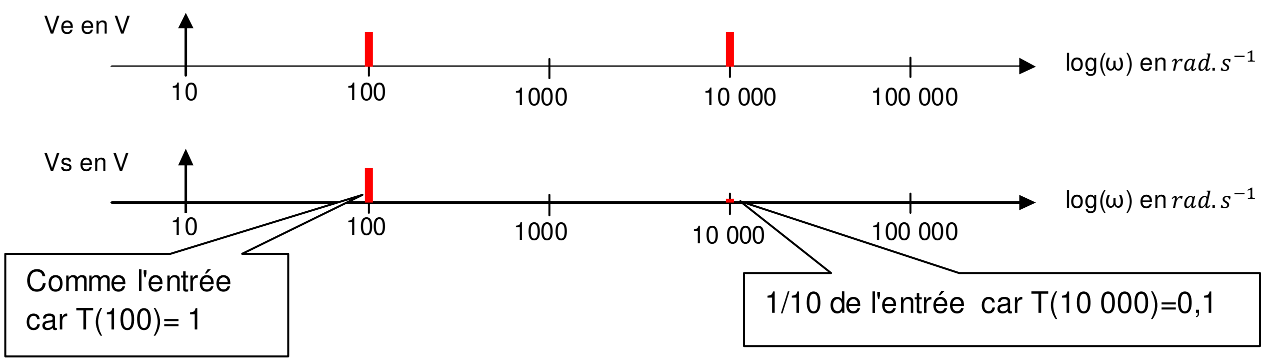
Exemple pour le filtre RC passe-bas



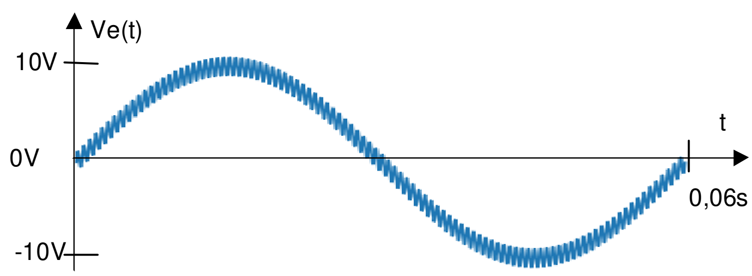
Signal mesuré de pulsation $100\ rad.s^{-1}$ bruité par un signal de $10\,000\ rad.s^{-1}$ de même amplitude 10 V :



Spectre du signal présentant l'amplitude de chacune des composantes du signal :



Finalement le signal filtré devient :



L'erreur de mesure due au bruit passe de 100% (sans le filtre) à 10% (grâce au filtre).

CC BY NC SA

3.6 Tracé asymptotique de Bode

Le tracé asymptotique de Bode consiste à tracer les asymptotes pour des pulsations très petites ou très grandes.
Les gains asymptotiques ont des expressions simples dont le tracé (réalisable facilement sans outil numérique) donne une allure assez proche du tracé complet.

Exemple : filtre RC passe bas $\underline{T}(j\omega) = K.\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $K = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 1000\ rad.s^{-1}$

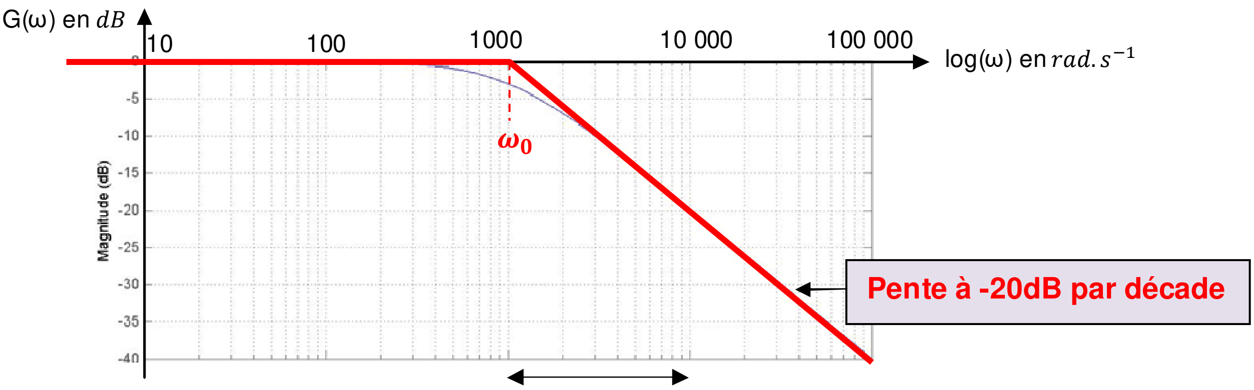
Asymptote pour ω ≪ ω₀ : $\underline{T}(j\omega)\Big|_{\omega \ll \omega_0} \approx \frac{K}{1} = 1$ soit $G(\omega)|_{\omega \ll \omega_0} \approx 20\log|K| = 0$

(ou f ≪ f_0) **:**

Asymptote pour ω ≫ ω₀ : $\underline{T}(j\omega)\Big|_{\omega \gg \omega_0} \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = -j\frac{\omega_0}{\omega}$ soit : $G(\omega)|_{\omega \gg \omega_0} \approx 20log(\omega_0) - 20log(\omega)$

(ou f ≫ f_0) :

Dans le diagramme de Bode, l'axe X des abscisses est gradué en X = log(ω), donc le gain en hautes fréquences, est une droite du type 20log(ω_0) – 20X (de gain nul à X = $log(\omega_0)$).



une décade =
bande de fréquence avec ω_{max} = 10.ω_{min}
ici [ω_{min}=1000 $rad.s^{-1}$; ω_{max}=10 000 $rad.s^{-1}$]

3.7 Bande passante à -3dB

La bande passante d'un filtre caractérise la bande de fréquence qui n'est pas éliminée en sortie d'un filtre.

La bande passante à -3dB, est la zone de fréquence pour laquelle on a un gain G ≥ G_{min} =- 3dB.

Exemple : sur le tracé précédent, la bande passante est $BP = [0\ ;\ 1000\, rad.s^{-1}]$

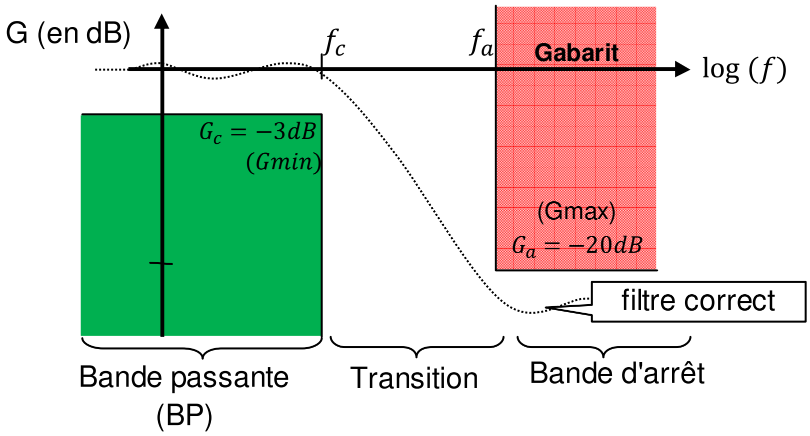
CC BY NC SA

3.8 Gabarit de filtre dans un diagramme de Bode

Le gabarit d'un filtre définit le cahier des charges du filtre en indiquant :

- la fréquence de coupure fc (limite(s) des fréquences à conserver)
- la fréquence d'arrêt fa (limite(s) des fréquences à atténuer)
- le gain minimum Gc de la bande de fréquences à conserver.
- le gain maximum Ga de la bande de fréquence à atténuer.

Gabarit d'un filtre passe-bas :



4 Classification des filtres analogiques

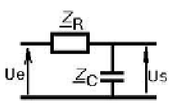
4.1 Classification par la bande passante

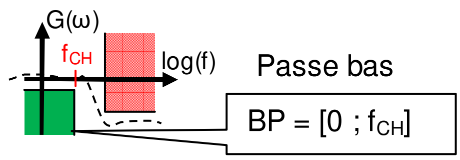
L'objectif du filtrage est de sélectionner une fréquence ou une bande de fréquence appelée **Bande Passante BP** exprimée en Hz (éventuellement en $rad.s^{-1}$).

Les limites de la bande passante sont définies par une **fréquence de coupure fc** qui peut être la limite basse ou haute de la bande passante.

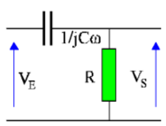
On distingue 4 types de filtre idéal définis selon leur gabarit :

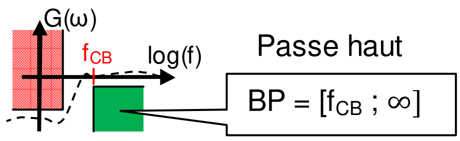
- **Filtre passe bas**
  - laisse passer les basses fréquences
  - élimine les hautes fréquences.



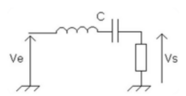


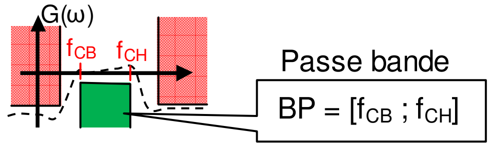
- **Filtre passe haut**
  - Laisse passer les hautes fréquences
  - élimine les basses fréquences.



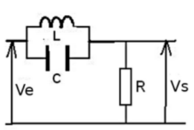


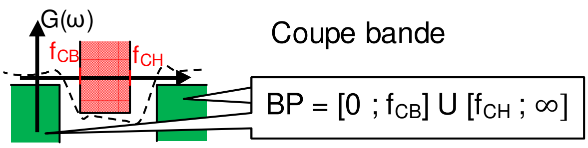
- **Filtre passe bande** :
  - Laisse passer une bande de fréquence
  - élimine celles en dehors de la bande passante





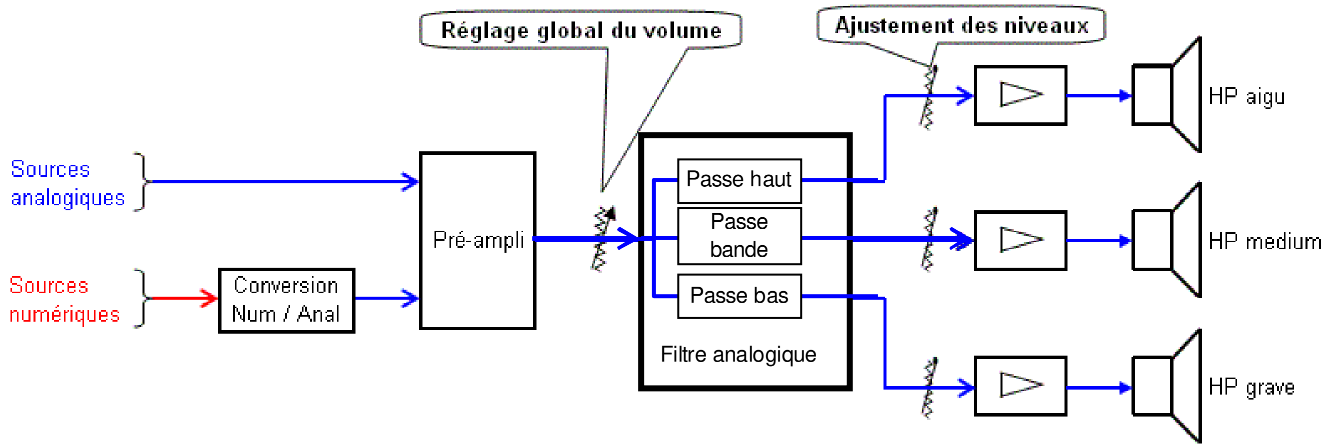
- **Filtre réjecteur de bande (coupe bande)** :
  - Laisse passer toutes les fréquences
  - sauf une bande de fréquence.





BY NC SA

Exemple d'application du filtrage analogique : équaliseur de son analogique



4.2 Classification par l'ordre de la fonction de transfert

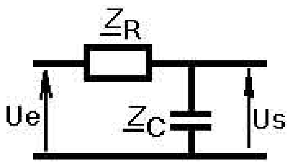
Le filtre est d'ordre 1 lorsque le polynôme du dénominateur (ou du numérateur) est de degré 1 :

Filtre passe bas d'ordre 1 : $\underline{T}(j\omega) = K.\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

K est appelé **amplification statique** (sans unité)
ω_0 la **pulsation de coupure** (en $rad.s^{-1}$)

Exemple : filtre RC

K=1 et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$



Le filtre est d'ordre 2 lorsque le polynôme du dénominateur (ou du numérateur) est de degré 2 :

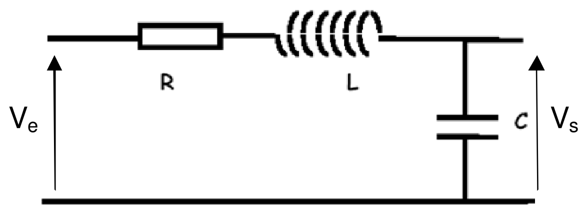
Filtre passe bas d'ordre 2 :

$$\boxed{T(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z.j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

avec : **K : amplification statique**
ω_0 : pulsation propre ($rad.s^{-1}$)
z : facteur d'amortissement (souvent remplacé par Q : facteur de qualité du filtre ; $z = \frac{1}{2Q}$)

Exemple : filtre RLC

K=1 ; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ *et* $z = \frac{R}{2}.\sqrt{\frac{C}{L}}$



Le filtre est d'autant plus sélectif que son ordre est important (la pente de la transition est plus grande dans le tracé de Bode).
Un filtre d'ordre 2 est ainsi plus sélectif qu'un filtre d'ordre 1.