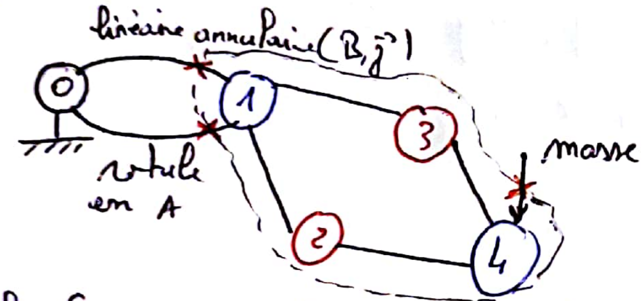
Td ST-1.1

Exercice 1 : Console Portante de bateau

Q1 : liaison en A : rotule $\{\tau_{A0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,R}$

Q2 : liaison en B : sphère cylindre $\{\tau_{B0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R}$

Q3 : Graphe de structure :



On isole $\{1+2+3+4\}$ et on effectue le BAME

BAME :

- $0\to1$: Liaison rotule en A
- $0\to1$: Liaison sphère cylindre en B d'axe $(B,\vec{z})$
- ext $\to 4$: $-mg\vec{z}$ en G $\{\tau_{g\to4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$

On applique le PFS au point A : les inconnues de liaison y sont plus nombreuses

$$\sum\{\tau_{ext\to syst}\} = \{0\}$$

- Déplacement du torseur en B au point A : les résultantes sont conservées

$$\overrightarrow{M_{A_{B0\to1}}} = \overrightarrow{M_{B0\to1}} + \overrightarrow{AB}\wedge \overrightarrow{R_{0\to1}} = \vec{0} + z_B\cdot\vec{z}\wedge(X_B\vec{x}+Y_B\vec{y})$$

$$= z_B X_B\vec{y} - z_B Y_B\vec{x}$$

$$\{\tau_{B0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_B & -z_B Y_B \\ Y_B & z_B X_B \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,R}$$

• Déplacement en A du torseur du poids:

$$\overrightarrow{M_{A\,ext\to 4}} = \overrightarrow{M_{G\,ext\to 4}} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R_{ext\to 4}} = \vec{0} + (x_G\vec{x} + y_G\vec{y} + z_G\vec{z}) \wedge (-mg\vec{z})$$

$$= x_G\, mg\, \vec{y} - y_G\, mg\, \vec{x}$$

$$\{\mathcal{T}_{ext\to 4}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & -y_G mg \\ 0 & x_G mg \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_R$$

• Ecriture des équations issues du PFS:

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_A - mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -z_B Y_B - y_G mg = 0 \\ z_B X_B + x_G mg = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{Z_A = mg} \;;\; \underline{Y_B = -\frac{y_G mg}{z_B}} \;;\; \underline{X_B = \frac{-x_G . mg}{z_B}}$$

$$\underline{Y_A = \frac{y_G mg}{z_B}} \;;\; \underline{X_A = \frac{x_G mg}{z_B}}$$

Q4: $\underbrace{\overrightarrow{M_{B\,rotule\,0\to 1}}}_{=\vec{0}\text{ en proj sur }\vec{z}} + \underbrace{\overrightarrow{M_{B\,sphère/cyl\,0\to 1}}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{M_{B\,F\,ext\to 4}}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{M_{B\,F\,vent\to 4}} + \overrightarrow{M_{B\,F\,vérin\to 1}} = \vec{0}$

On peut utiliser la méthode du bras de levier pour exprimer les moments

$$y_G . F_{vent\to 4} + y_C F_{vérin\to 1} = 0$$

$$\boxed{F_{vérin\to 1} = -\frac{y_G}{y_C} . F_{vent\to 4}}$$

Q5: Application Numérique

$$F_{vérin\to 1} : \frac{2}{4} . 15\,000 = 7500\,N < 10\,000\,N.$$

Exercice 2 : Bouche de climatisation

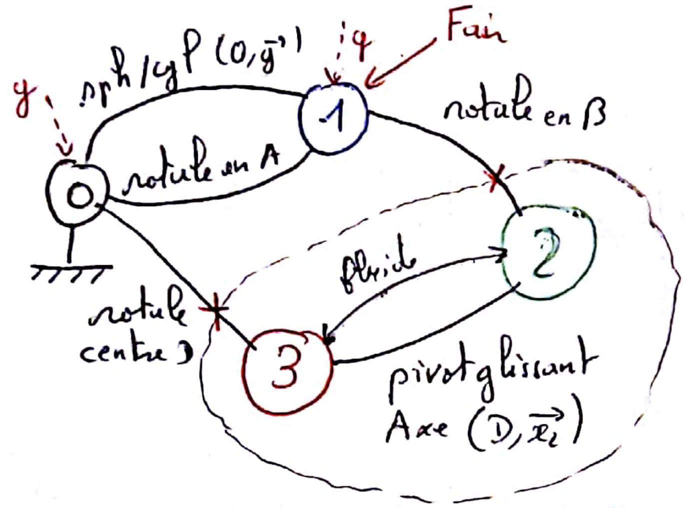
Q1 : $L_{0/1}$: liaison sphère cylindre d'axe $(O,\vec{y})$

$$\{\mathcal{T}_{SC0\to1}\} = {}_O\begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_R$$

Q2 : $L_{0/1}$: liaison rotule de centre A

$$\{\mathcal{T}_{R0\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_R$$

Q3 :



BAME :

- Action de $1\to2$ rotule en B :

$$\{F_{1\to2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} -pS & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$$

- Action de $0\to3$ rotule en D.

$$\{F_{0\to3}\} = {}_D\begin{Bmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}_R$$

Le système est soumis à 2 forces : ces forces ont même norme et sont directement opposées, portées par la droite support BD

$$X_{1\to2} = -X_{0\to3} \quad \text{soit :} \begin{cases} \overrightarrow{X_{1\to2}} = -pS\,\vec{x}_2 \\ \overrightarrow{X_{0\to3}} = pS\,\vec{x}_2 \end{cases}$$

On projette ensuite dans la base 0 : on pose $\sin\alpha = \dfrac{d}{e}$

$$\overrightarrow{X_{1-2}} = -pS\cos\alpha\,\vec{x} - pS\sin\alpha\,\vec{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} X_{12} = -pS\cos\alpha & X_{03} = pS\cos\alpha \\ Z_{12} = -pS\sin\alpha & Z_{03} = pS\sin\alpha \end{matrix}}$$

Q4 : On isole le solide 1 :

BAME :
- Action de 2→1 rotule de centre B
- L0/1 : liaison rotule en A
- L0/1 : liaison sphère cylindre d'axe $(O, \vec{y})$
- Action de l'air sur 1 en M
- Action de la pesanteur en G

On utilise le théorème du moment statique projeté sur l'axe $\vec{y}$ appliqué au point O.

$$\overrightarrow{M_{O F_{air\to1}}} + \underbrace{\overrightarrow{M_{O R_{O\to1}}} + \overrightarrow{M_{O sc_{O\to1}}} + \overrightarrow{M_{O g\to1}}}_{=\vec{0} \text{ en proj sur } \vec{y}} + \overrightarrow{M_{O F_{2\to1}}} = \vec{0}$$

$$\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{air\to1}} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_{2\to1}}\right) \cdot \vec{y} = \vec{0}$$

$$\left[(a\vec{y} - l\vec{z}) \wedge F_{air\to1} \cdot \vec{x} + ((2a+c)\vec{y} + d\vec{z}) \wedge (pS\cos\alpha\,\vec{x} + pS\sin\alpha\,\vec{y})\right] \cdot \vec{y} = 0$$

$$-l F_{air\to1} + d\,p\,S\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{pS = \frac{l . F_{air\to1}}{d\cos\alpha}}$$

Q5 : Application numérique :

$$p = \frac{l . F_{air\to1}}{S . d\cos\alpha} = \frac{40 \times 150}{20.10^{-4} . 20 . \cos\left(\arctan\left(\frac{20}{30}\right)\right)} = 180\,300 \text{ Pa}$$

Soit $p = 1{,}8$ bars < 2 bars $\Rightarrow$ OK.