Durée prof (1h10) → 2h

$\boxed{\text{Matrice et torseur cinétique}}$ (23' → 40')

14h27

(1) Matrice d'inertie du rotor 1 :

$$\overline{\overline{I}}_{G_1,1} = \begin{bmatrix} A & -F=0 & -E=0 \\ -F=0 & B & -D=0 \\ -E=0 & -D=0 & C=B \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R_1}$$

Justification :

- pièce de révolution d'axe $(G_1, \vec{x}_1)$ $\left\{ \begin{array}{l} D = E = F = 0 \\ B = C \end{array} \right.$

Cinématique

(2) $\boxed{\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\,\vec{x}_1}$

$\boxed{\vec{V}_{G_1,1/0} = \vec{0}}$ car G_1 est sur l'axe de la pivot entre 1 et 0.

(3) Cinétique

$\boxed{\vec{P}_{1/0} = m_1\,\vec{V}_{G_1,1/0} = \vec{0}}$

$$\vec{\sigma}_{G_1,1/0} = \overline{\overline{I}}_{G_1,1} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} + m_1\,\underbrace{\cancel{\vec{G_1G_1}}}_{\vec{0}} \wedge \underbrace{\cancel{\vec{V}_{G_1,1/0}}}_{\vec{0}}$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} A\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

14h35

$\boxed{\vec{\sigma}_{G_1,1/0} = A\dot{\theta}\,\vec{x}_1}$

$$Ec_{1/0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{p_{1/0}}.\overrightarrow{V_{G_1,1/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)$$

$$\boxed{Ec_{1/0} = \frac{1}{2}A.\dot{\theta}^2}$$

4) Position du centre de gravité :

$$\overrightarrow{G_1G} = X\,\vec{x}_1 + Y\,\vec{y}_1 + Z\,\vec{z}_1 = \vec{0} \qquad \boxed{\overrightarrow{G_1G} = \vec{0}}$$

Formule du barycentre :

$$(m_1 + m + m)\,\overrightarrow{G_1G} = m_1\,\cancel{\overrightarrow{G_1G_1}} + m\,\overrightarrow{G_1G_2} + m\,\overrightarrow{G_1G_3}$$

$$(m_1 + 2m)\,\overrightarrow{G_1G} = m\,(-L\vec{x}_1 + R\vec{y}_1) + m\,(L\vec{x}_1 - R\vec{y}_1)$$

14h39 $$(m_1 + 2m)\,\overrightarrow{G_1G} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \boxed{\overrightarrow{G_1G} = \vec{0}}$$

5) Matrice d'inertie en $G = G_1$:

$$\mathbb{I}_{G,e} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} = I_{zz} \end{bmatrix}_{R_1}$$

6) L'ensemble a admet une symétrie par rapport

14h43 au plan de normale $\vec{z}_1$ donc $\left| \begin{array}{ll} I_{yz} = 0 & I_{zy} = 0 \\ I_{xz} = 0 & I_{zx} = 0 \end{array} \right.$

7) Vitesses inchangées $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{e/0}} = \dot{\theta}\,\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{V_{G,e/0}} = \vec{0} \end{array} \right.}$

$\overrightarrow{\Omega_{e/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

$\overrightarrow{V_{G,e/0}} = \overrightarrow{V_{G_1,1/0}}$

8) Cinétique $\boxed{\overrightarrow{P_{e/0}} = M\,\overrightarrow{V_{G_1,e/0}} = \vec{0}}$

$$\overrightarrow{\sigma_{G,e/0}} = \mathbb{I}_{G,e}\,\overrightarrow{\Omega_{e/0}}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} = I_{zz} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{\theta} \\ -I_{xy}\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

d'où $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{G,e/0}} = I_{xx}\,\dot\theta\,\overrightarrow{x_1} - I_{xy}\,\dot\theta\,\overrightarrow{y_1}}$

14h50

$$Ec_{e/0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{p_{e/0}}.\overrightarrow{V_{G,e/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G,1/0}}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right) \quad \boxed{Ec_{e/0} = \frac{1}{2} I_{xx}.\dot\theta^2}$$

Théorème de Huygens (12' → 25')

15h08

9 Théorème de Huygens pour les moments d'inertie

$$I_{2,z} = \cancel{I_{G2,z}} + m\ r^2$$

$$\boxed{I_{2,z} = m r^2}$$

De même $\boxed{I_{3,z} = m r^2}$ $\quad I_{3,z} = 0{,}03.0{,}08^2$

$I_{3,z} = 0{,}0019\ kg\,m^2$

$$I_{3z} = 0{,}145\ kg\ m^2 \gg 2\,I_{3,z} = 0{,}0038\ kg\,m^2$$

15h14

10 Théorème de Huygens (produit d'inertie) :

$$P_{2,xy} = \cancel{P_{G2,xy}}^{0} + m\,(-L)\,(r) \quad \boxed{P_{2,xy} = -mLr}$$

$$P_{3,xy} = \cancel{P_{G3,xy}}_{0} + m\,(L).(-r) \quad \boxed{P_{3,xy} = -mLr}$$

D'où $I_{xy} = \cancel{F}^{0} + P_{2,xy} + P_{3,xy}$

$$\boxed{I_{xy} = -2\,m\,L\,r} \quad I_{xy} = -2.0{,}03.0{,}252.0{,}08$$

15h20

$I_{xy} = -0{,}0012\ kg.m^2$

17h24

11 Moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_{G,e/R}} = \mathbb{I}_{G,e}\,\overrightarrow{\Omega_{e/R}}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{bmatrix} \dot\theta \\ \dot\beta\cos\theta \\ \dot\beta\sin\theta \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{G,e/R}} = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot\theta - I_{xy}\dot\beta\cos\theta \\ -I_{xy}\dot\theta + I_{yy}\dot\beta\cos\theta \\ -I_{zz}\dot\beta\sin\theta \end{bmatrix}}$$

Energie cinétique galiléenne :

$$Ec_{e/R} = \frac{1}{2}\left[M\,\overrightarrow{V_{G,e/R}}\cdot\overrightarrow{V_{G,e/R}} + \overrightarrow{\sigma_{G,e/R}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{e/R}} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\left(I_{xx}\dot\theta - I_{xy}\dot\beta\cos\theta\right)\dot\theta + \left(-I_{xy}\dot\theta + I_{yy}\dot\beta\cos\theta\right)\dot\beta\cos\theta + \left(-I_{zz}\dot\beta\sin\theta\right)\left(-\dot\beta\sin\theta\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\dot\theta^2 I_{xx} - \dot\theta\dot\beta I_{xy}\cos\theta + -\dot\theta\dot\beta I_{xy}\cos\theta + \dot\beta^2 I_{yy}\cos^2\theta + \dot\beta^2 I_{zz}\sin^2\theta\Big]$$

$$\boxed{Ec_{e/R} = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\dot\theta^2 + I_{zz}\dot\beta^2 - 2\dot\theta\dot\beta I_{xy}\cos\theta \right)}$$

12 Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dEc_{e/R}}{dt} = \left(P_{R\to e/R} + P_{p\to e/R}\right) + P_{int}$$

$$\begin{cases} P_{R\to e/R} = -k\beta\,\dot{\beta} \\ P_{p\to e/R} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{V}_{G,e/R} = \vec{0} \\ P_{int} = 0 \quad (\text{liaison parfaite}) \end{cases}$$

$$I_{yy}\,\ddot{\beta}\,\cancel{\dot{\beta}} + I_{xy}\sin\theta\,\dot{\theta}^2\,\cancel{\dot{\beta}} = -k\beta\,\cancel{\dot{\beta}}$$

$$I_{yy}\,\ddot{\beta} + k\beta = -I_{xy}\sin\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\ddot{\beta} + \frac{k}{I_{yy}}\beta = -\frac{I_{xy}}{I_{yy}}\dot{\theta}^2\sin\theta}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_{yy}}}$

17h37

$$\boxed{N_0 = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I_{yy}}}} \qquad N_0 = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{76}{0{,}145}}$$

$$\boxed{N_0 = 219\,tr/min}$$

Amplitude de β dépend de :

- I_{xy} : déséquilibre
- k : raideur
- $\dot{\theta}$: vitesse du rotor
- I_{yy} : inertie du système